

თილერის თლიმპიადა. მეორე ტური. (პირველი სესია)

ამოცანები

ამოცანა 1:

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

რამდენიმე დადებითი რიცხვის საშუალო სიმრავლე ვუწოდოთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ამ რიცხვების საშუალო არითმეტიკულისაგან, გეომეტრიულისაგან, ჰარმონიულისაგან და კვადრატულისაგან. რამდენიმე დადებით რიცხვში ერთერთს დავარქვათ *გამორჩეული*, თუ ის ეკუთვნის მის გარდა დანარჩენი ყველა რიცხვის საშუალო სიმრავლეს.

ა) დაამტკიცეთ, რომ თუ რომელიმე შვიდ დადებით რიცხვში ექვსი მაინც არის გამორჩეული, მაშინ მეშვიდე რიცხვიც გამორჩეულია.

ბ) დაადგინეთ, არსებობს თუ არა შვიდი წყვილწყვილად განსხვავებული დადებითი რიცხვი, რომელთა შორის მუსტად ხუთი რიცხვი არის გამორჩეული.

ამოცანა:

ა) განვიხილოთ შვიდი დადებითი რიცხვი, რომელშიც ექვსი მაინც არის გამორჩეული. დავალაგოთ ეს რიცხვები ზრდის მიხედვით: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq a_7$.

დავამტკიცოთ, რომ შვიდივე რიცხვი თანაბარია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო - ვთქვათ, $a_1 < a_7$. ცხადია, რომ

$$a_1 = M(a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1) < M(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$$

სადაც $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$ აღნიშნავს $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვების ამოცანის პირობაში განხილულ ნებისმიერ საშუალოს (არითმეტიკულს, გეომეტრიულს, ჰარმონიულს ან კვადრატულს). ანალოგიურად

$$a_7 = M(a_7, a_7, a_7, a_7, a_7, a_7) > M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

მივიღეთ, რომ როგორც a_1 , ასევე a_7 არ არის გამორჩეული, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ესე იგი $a_1 = a_7$, ანუ ყველა რიცხვი თანაბარია და, შესაბამისად, შვიდივე რიცხვი გამორჩეულია.

ბ) პირველ რიგში დავასაბუთოთ შემდეგი ლემა:

ლემა: თუ $M(a_1, a_2, \dots, a_n) = A$, მაშინ $M(A, a_1, a_2, \dots, a_n) = A$, სადაც $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$ აღნიშნავს $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვების ამოცანის პირობაში განხილულ ნებისმიერ საშუალოს (არიტმეტიკულს, გეომეტრიულს, ჰარმონიულს ან კვადრატულს).

პირველი ვარიანტი: თუ $A = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$, მაშინ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{n}{A}$ და

$$\frac{n+1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n+1}{\frac{1}{A} + \frac{n}{A}} = \frac{n+1}{\frac{1+n}{A}} = A \cdot \frac{n+1}{1+n} = A$$

მეორე ვარიანტი: თუ $A = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, მაშინ $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = A^n$ და

$$\sqrt[n+1]{A \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n+1]{A \cdot A^n} = \sqrt[n+1]{A^{n+1}} = A$$

მესამე ვარიანტი: თუ $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, მაშინ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A \cdot n$ და

$$\frac{A + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n+1} = \frac{A + n \cdot A}{n+1} = A \cdot \frac{1+n}{n+1} = A$$

მეოთხე ვარიანტი: თუ $A = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$, მაშინ $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = A^2 \cdot n$ და

$$\sqrt{\frac{A^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n+1}} = \sqrt{\frac{A^2 + A^2 \cdot n}{n+1}} = \sqrt{A^2 \cdot \frac{1+n}{n+1}} = A$$

მივიღეთ, რომ ოთხივე შემთხვევაში საშუალო იგივე რიცხვი გამოდის, თუ რიცხვებში თვითონ ამ საშუალო მნიშვნელობასაც ჩავამატებთ. ამით ლემა დამტკიცდა. ახლა დავუბრუნდეთ ამოცანას.

დავუშვათ არსებობს შვიდი წყვილწყვილად განსხვავებული დადებითი რიცხვი, რომელთაგან ზუსტად ხუთი არის გამორჩეული. რადგან ამოცანის პირობაში მოყვანილია ოთხი საშუალო, ამიტომ იმ ხუთი გამორჩეული რიცხვიდან, დირიხლეს პრინციპის თანახმად, ორი მაინც გამოვა მის გარდა დანარჩენი რიცხვების ერთი და იგივე საშუალოს ტოლი. ლემის თანახმად კი შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ეს ორი რიცხვი ყველა რიცხვის ერთი და იგივე საშუალოს ტოლია, რაც თანაბარ რიცხვებს მოგვცემდა, მაგრამ პირობის მიხედვით რიცხვთა ყველა წყვილი განსხვავებულია. ესე იგი შეუძლებელია ასეთი შვიდი რიცხვი არსებობდეს.

ამოცანა 2:

(ამოცანის ავტორი: გიორგი არაბიძე)

ვთქვათ, D არის არატოლფერდა ABC სამკუთხედის BC გვერდის შუა წერტილი. ცნობილია, რომ ABD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისადმი A და B წერტილებზე გავლებული მხეხვები იკვეთებიან P წერტილში, ხოლო ACD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისადმი A და C წერტილებზე გავლებული მხეხვები იკვეთებიან Q წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ PQ მონაკვეთის შუა წერტილი მდებარეობს BC წრფეზე.

ამოხსნა:

განვიხილოთ ABP და ACQ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების გადაკვეთის M წერტილი. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ M წერტილი მდებარეობს PQ მონაკვეთზე.

$PMBA$ და $QMAC$ ოთხკუთხედების ჩახაზულობიდან გამომდინარე გვექნება ტოლობები:

$$\angle PMA = \angle PBA = \frac{\widehat{AB}}{2} = \angle BDA = \frac{\widehat{AC}}{2} = \angle QCA = 180^\circ - \angle QMA$$

მივიღეთ, რომ $\angle PMA + \angle QMA = 180^\circ$. ესე იგი, M წერტილი მდებარეობს PQ მონაკვეთზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ M წერტილი მდებარეობს BC წრფეზე. შესაბამისი ოთხკუთხედების ჩახაზულობიდან გამომდინარე, გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$\angle QMC = \angle QAC = \frac{\widehat{AC}}{2} = \angle BDA = \frac{\widehat{AB}}{2} = \angle PAB = \angle QMB$$

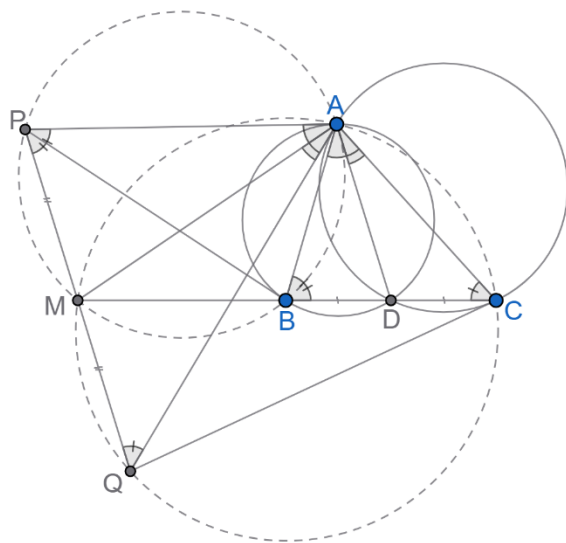
მივიღეთ, რომ $\angle QMC = \angle QMB$. ესე იგი M წერტილი მდებარეობს BC წრფეზე.

დასამტკიცებელი დარჩა, რომ $MP = MQ$.

ცხადია, რომ $\angle MAQ = \angle MCQ = \frac{\widehat{DC}}{2} = \angle DAC$. ასევე, $\angle MQA = \angle MCA$. მივიღეთ, რომ MAQ და DAC სამკუთხედები მსგავსია. ესე იგი $\frac{MQ}{MA} = \frac{DC}{DA}$.

ანალოგიურად: $\angle MAP = \angle MBP = \frac{\widehat{BD}}{2} = \angle DAB$. ასევე, $\angle MPA = \angle ABC$. მივიღეთ, რომ MAP და DAB სამკუთხედები მსგავსია. ესე იგი $\frac{MP}{MA} = \frac{DB}{DA}$.

რადგან D არის BC გვერდის შუა წერტილი, შეგვიძლია დავწეროთ: $\frac{MQ}{MA} = \frac{DC}{DA} = \frac{DB}{DA} = \frac{MP}{MA}$. მივიღეთ, რომ $MQ = MP$.



ამოცანა 3:

(ამოცანის ავტორი: გიორგი არაბიძე)

იპოვეთ დადებით მთელ რიცხვებში განსაზღვრული ყველა $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

$$1) \quad f(f(f(n))) + 4n = 3 \cdot f(f(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2) \quad f(f(n)) \leq f(n) + 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) ყოველი დადებითი მთელი n რიცხვისთვის არსებობს უსასრულოდ ბევრი დადებითი მთელი რიცხვი m , რომლისთვისაც $\underbrace{f(f(\dots f(n) \dots))}_m$ იყოფა 2^m -ზე.

ამოხსნა:

პ ა ს უ ხ ი: $f(n) = 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი მთელი რიცხვი n და შევადგინოთ რიცხვთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$a_0 = n \quad \text{და} \quad a_m = f(a_{m-1}), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

ცხადია, რომ $f(f(f(a_m))) = f(f(a_{m+1})) = f(a_{m+2}) = a_{m+3}$, აქედან გამომდინარე, თუ პირობაში მოცემულ პირველ თვისებაში n -ის ნაცვლად შევიტანთ a_m -ს, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას: $a_{m+3} + 4a_m = 3a_{m+2}$. ესე იგი ჩვენ მივიღებთ რიცხვით მიმდევრობას, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული წესით:

$$a_0 = n, \quad a_1 = f(n), \quad a_2 = f(f(n)) \quad \text{და} \quad a_{m+3} = 3a_{m+2} - 4a_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი დადებითი მთელი m რიცხვისთვის შეგვიძლია დავადგინოთ თუ რას უდრის a_m , მხოლოდ n -ის, $f(n)$ -ის, $f(f(n))$ -ის და m -ის საშუალებით.

განვიხილოთ მიმდევრობის შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. ცხადია, რომ $x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1)$. როგორც ვხედავთ, მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვი, ამიტომ მიმდევრობის ზოგადი a_m წევრი იქნება 2^m -ის, $m \cdot 2^{m-1}$ -ის და $(-1)^m$ -ის რაღაც წრფივი კომბინაცია. ანუ არსებობს ისეთი სამი A , B და C რიცხვი, რომ ყოველი არაუარყოფითი მთელი m რიცხვისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$a_m = A \cdot 2^m + B \cdot m \cdot 2^{m-1} + C \cdot (-1)^m$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ A , B და C რიცხვები n -ის, $f(n)$ -ის და $f(f(n))$ -ის საშუალებით, რადგან ჩვენ ვიცით, რომ სრულდება შემდეგი სამი ტოლობა:

$$\begin{cases} a_0 = A + C = n \\ a_1 = 2A + B - C = f(n) \\ a_2 = 4A + 4B + C = f(f(n)) \end{cases}$$

წრფივ განტოლებათა ამ სისტემის ამოხსნით ვიღებთ:

$$\begin{aligned} A &= \frac{5n + 4f(n) - f(f(n))}{9} \\ B &= \frac{-2n - f(n) + f(f(n))}{3} \\ C &= \frac{4n - 4f(n) + f(f(n))}{9} \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ პირობაში მოცემული მეორე თვისების თანახმად: $B \leq 0$. დავუშვათ, რომ $B < 0$ და ზოგადი წევრის ფორმულა გავყოთ $(m \cdot 2^{m-1})$ -ზე. მივიღებთ:

$$\frac{a_m}{m \cdot 2^{m-1}} = A \cdot \frac{2}{m} + B + C \cdot \frac{(-1)^m}{m \cdot 2^{m-1}}$$

ცხადია, რომ $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2}{m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^m}{m \cdot 2^{m-1}} = 0$. ეს ნიშნავს, რომ საკმარისად დიდი m -ისთვის $\frac{a_m}{m \cdot 2^{m-1}} < 0$, ანუ $a_m < 0$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ესე იგი არ შეიძლება, რომ B იყოს უარყოფითი. ამიტომ $B = 0$.

მივიღეთ, რომ $f(f(n)) = f(n) + 2n$. ამ შედეგის გათვალისწინებით:

$$A = \frac{5n + 4f(n) - f(f(n))}{9} = \frac{5n + 4f(n) - f(n) - 2n}{9} = \frac{3n - 3f(n)}{9} = \frac{n - f(n)}{3}$$

და, ასევე,

$$C = \frac{4n - 4f(n) + f(f(n))}{9} = \frac{4n - 4f(n) + f(n) + 2n}{9} = \frac{6n - 3f(n)}{9} = \frac{2n - f(n)}{3}$$

მივიღეთ, რომ ყოველი არაუარყოფითი მთელი m რიცხვისთვის:

$$3 \cdot a_m = (n - f(n)) \cdot 2^m + (2n - f(n)) \cdot (-1)^m$$

პირობაში მოცემული მესამე თვისების თანახმად, არსებობს უსასრულოდ დიდი m რიცხვი, რომლისთვისაც $(2n - f(n))$ იყოფა 2^m -ზე, რაც, ცხადია ნიშნავს, რომ $2n - f(n) = 0$. მივიღეთ, რომ ყოველი დადებითი მთელი n რიცხვისთვის $f(n) = 2n$, რომელიც მართლაც აკმაყოფილებს პირობაში მოცემულ სამივე თვისებას.