

თილერის თეორემა. მეორე ტური. (მეორე სესია)

ა მ თ ხ ს ნ ა ბ ი

ამოცანა 4:

(ამოცანის ავტორი: თოლორაია თეიმურაზი)

დადებით მთელ რიცხვთა (n, k) წყვილს ვუწოდოთ *საინტერესო*, თუ $2 < k < n$ და შესაძლებელია n რაოდენობის ადამიანი გადანაწილდეს რამდენიმე კომიტეტში ისე, რომ დაკმაყოფილდეს შემდეგი ორი პირობა:

- 1) თითოეულ კომიტეტში შედის ზუსტად k რაოდენობის ადამიანი.
- 2) ადამიანთა ყოველი წყვილისთვის არსებობს ზუსტად ერთი კომიტეტი, რომელშიც ორივე მათგანი შედის.

დაამტკიცეთ, რომ

- ა) თუ (n, k) წყვილი საინტერესოა, მაშინ $(n - 1)$ იყოფა $(k - 1)$ -ზე.
- ბ) თუ (n, k) წყვილი საინტერესოა, მაშინ $n(n - 1)$ იყოფა $k(k - 1)$ -ზე.
- გ) თუ $p > 2$ მარტივი, ხოლო $m > 1$ მთელი რიცხვია, მაშინ (p^m, p) წყვილი საინტერესოა.

ა მ თ ხ ს ნ ა:

განვიხილოთ n ნებისმიერი ადამიანი. ვთქვათ, მისი სახელია ლეონარდი, და ის განწევრიანებულია r რაოდენობის კომიტეტში. გადავწოდოთ ეს კომიტეტები 1-იდან r -ის ჩათვლით მთელი რიცხვებით. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots, A_r$ არის სიმრავლეთა ჯგუფი, სადაც A_i აღნიშნავს i -ურ კომიტეტში ლეონარდის გარდა დანარჩენ ადამიანთა სიმრავლეს.

პირობაში მოცემული პირველი წესის თანახმად თითოეულ კომიტეტში ლეონარდის გარდა კიდევ არის $k - 1$ ადამიანი. ამიტომ თითოეული A_i სიმრავლე $(k - 1)$ -ელემენტია. ხოლო მეორე წესის თანახმად სიმრავლეთა ყოველი წყვილი თანაუკვეთია და ყველას გაერთიანება გვაძლევს ლეონარდის გარდა ყველა დანარჩენ ადამიანთა სიმრავლეს. რადგან სულ r -ცალი წყვილწყვილად თანაუკვეთი სიმრავლის გაერთიანება არის $(n - 1)$ -ელემენტია სიმრავლე, ამიტომ გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$r(k - 1) = n - 1$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ $r = \frac{n-1}{k-1}$, რაც მთელი რიცხვია, ანუ მივიღეთ, რომ $(n - 1)$ იყოფა $(k - 1)$ -ზე და ამოცანის ა) ნაწილი დამტკიცდა.

ბ) ნაწილის დასამტკიცებლად დავთვალოთ ადამიანთა ისეთ წყვილთა რაოდენობა, რომლებიც რომელიმე კომიტეტში ერთად არიან განწევრიანებულები. ასეთ წყვილთა რაოდენობა ერთი მხრივ იქნება $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, რადგან პირობაში მოცემული მეორე წესის თანახმად ადამიანთა ყოველი წყვილი არის ზუსტად ერთ კომიტეტში ერთად განწევრიანებული. მეორე მხრივ შეგვიძლია დავითვალოთ თითოეულ კომიტეტში წყვილთა რაოდენობა, რომელიც არის $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ და სულ ასეთ წყვილთა რაოდენობა გამოვა $b \cdot \binom{k}{2}$, სადაც b არის კომიტეტთა რაოდენობა. ამ რაოდენობაში მეორე წესის თანახმად ყველა წყვილი ზუსტად ერთხელ ჩაითვლება. ამიტომ გვექნება ტოლობა:

$$b \cdot \frac{k(k - 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2}$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ $b = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}$, რაც მთელი რიცხვია, ანუ $n(n - 1)$ იყოფა $k(k - 1)$ -ზე და ბ) ნაწილიც დამტკიცდა.

გ) განვიხილოთ ნებისმიერი $p > 2$ მარტივი და $m > 1$ მთელი რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ p^m რაოდენობის ადამიანი შეგვიძლია გავანწევრიანოთ რამდენიმე p წევრიან კომიტეტში ისე, რომ შესრულდეს პირობაში მოთხოვნილი წესები.

განვიხილოთ სიმრავლე: $P = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$. თითოეული ადამიანი აღვიქვათ, როგორც დალაგებული m -ეული $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, სადაც ყოველი x_i არის P სიმრავლის ელემენტი. ცხადია ადამიანთა რაოდენობა მართლაც იქნება p^m .

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით m რიცხვის მიმართ ვაჩვენოთ, რომ ეს p^m რაოდენობის m -ეული შეგვიძლია გავანაწილოთ რამდენიმე კომიტეტში ისე, რომ თითოეულ კომიტეტში იყოს ზუსტად p რაოდენობის m -ეული და m -ეულთა ყოველი წყვილი იყოს განწევრიანებული ზუსტად ერთ კომიტეტში. მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ განვიხილეთ $m > 1$ მთელი რიცხვი, ეს ფაქტი $m = 1$ შემთხვევისთვისაც სამართლიანია. ამიტომ ინდუქციური ბაზის შემოწმება შეგვიძლია $m = 1$ შემთხვევიდან დავიწყოთ.

ინდუქციური ბაზა: თუ $m = 1$ მაშინ ცხადია, რომ ყველა ადამიანი შეგვიძლია ერთ კომიტეტში გავანწევრიანოთ და ამოცანის პირობის ორივე მოთხოვნა შესრულდება.

ინდუქციური დამტკიცება: ვთქვათ, $m > 1$ და p^{m-1} რაოდენობის $(m - 1)$ -ეული შესაძლებელია გავანაწილოთ კომიტეტებში ისე, რომ თითოეულ კომიტეტში იყოს p რაოდენობის $(m - 1)$ -ეული და ყოველი წყვილი ზუსტად ერთ კომიტეტში გვხვდებოდეს.

ინტუიციური ბიჯი: განვიხილო p^m რაოდენობის m -ეული და მოვახდინოთ მათი კომიტეტებში განაწილება ისე, რომ დაკმაყოფილდეს საჭირო მოთხოვნები.

პირველ რიგში m -ეულები გადავანაწილოთ p -ცალ ჯგუფში იმის მიხედვით თუ რას უდრის მისი პირველი კომპონენტი (ჯგუფი არ იქნება კომიტეტი!). ანუ m -ეული $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ჩავსვით $(x_1 + 1)$ -ე ჯგუფში. ანუ ერთ ჯგუფში აღმოჩნდებიან ის m -ეულები, რომლებსაც პირველი კომპონენტი თანაბარი აქვთ. ცხადია, რომ თითოეულ ჯგუფში მოხვდება p^{m-1} რაოდენობის m -ეული და მათზე ავამუშაოთ ინდუქციური დაშვება. ანუ თითოეული ჯგუფის m -ეულები დავყოთ კომიტეტებად ისე, რომ იმ m -ეულებში, რომელთაც პირველი კომპონენტი ფიქსირებული აქვთ კომიტეტების სისტემა დააკმაყოფილებს საჭირო მოთხოვნებს. მაგალითად დაკმაყოფილდება ის, რომ ყველა კომიტეტში იქნება p რაოდენობის m -ეული და, ასევე, m -ეულთა ყოველი წევრისთვის, რომელთაც პირველი კომპონენტი თანაბარი აქვთ, იარსებებს ზუსტად ერთი კომიტეტი, რომელშიც წევრის ორივე წევრი შედის.

აქამდე აგებული კომიტეტებისთვის ჯერჯერობით თითოეულ კომიტეტში შედის მხოლოდ ისეთი m -ეულები, რომელთაც პირველი კომპონენტი თანაბარი აქვთ. საჭიროა, რომ ავაგოთ სხვა კომიტეტებიც. ჩვენ გვჭირდება, რომ m -ეულთა ნებისმიერი წევრისთვის მოიძებნებოდეს ზუსტად ერთი კომიტეტი რომელშიც წევრის ორივე წევრი შევა.

განვიხილოთ ნებისმიერი m -ეული $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ და m -ეული რომლის პირველი კომპონენტი 1-ის ტოლია: $D = (1, d_2, d_3, \dots, d_m)$. თითოეული დაფიქსირებული (X, D) წევრისთვის ავაგოთ შემდეგი კომიტეტი:

$$C_{X,D} = \{(x_1 + t, x_2 + td_2, x_3 + td_3, \dots, x_m + td_m) \pmod{p} \mid t \in P = \{0, 1, \dots, p-1\}\}$$

ესე იგი t რიცხვს გავარბენინებთ P სიმრავლის მნიშვნელობებს და თითოეულ კომპონენტში ჩავსვამთ შესაბამისი რიცხვის p -ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს. ცხადია, რომ ასეთი კომიტეტებიც შეიცავენ p რაოდენობის m -ეულს.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ახალი კომიტეტები შეიცავენ თითო m -ეულს ყველა ჯგუფიდან, რადგან $x_1 + t$ რიცხვი გაირბენს ყველა მნიშვნელობას P სიმრავლიდან.

ცხადია, რომ თუ $Y \in C_{X,D}$, მაშინ $X \in C_{Y,D}$. ეს სამართლიანია, რადგან თუ $x_i + td_i \equiv y_i \pmod{p}$, მაშინ $y_i + (p-t)d_i \equiv x_i \pmod{p}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი ორი m -ეული $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ და $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. თუ $x_1 = y_1$, მაშინ ისინი ერთი ჯგუფის m -ეულები არიან და ინდუქციური დაშვების თანახმად არსებობს ზუსტად ერთი კომიტეტი, რომელშიც ეს ორი m -ეული არის განწევრიანებული. ხოლო როდესაც $x_1 \neq y_1$, მაშინ $Y \in C_{X,D}$, სადაც

$$D = \left(1, \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}, \frac{y_3 - x_3}{y_1 - x_1}, \dots, \frac{y_m - x_m}{y_1 - x_1}\right).$$

ასეთი D -ს განხილვის შემთხვევაში $C_{X,D}$ სიმრავლის ერთერთი ელემენტი, მაშინ როცა $t = y_1 - x_1$, გამოდის Y .

როგორც გამოჩნდა m -ეულთა განსხვავებული წევრი ყველა ვარიანტში ცალსახად აფიქსირებს კომიტეტს, რომელშიც წევრის ორივე წევრი გვხვდება. ესე იგი კომიტეტთა ასეთი სისტემა აკმაყოფილებს პირობაში მოცემულ წესებს და შესაბამისად (p^m, p) წევრილი საინტერესოა.

ამოცანა 5:

(ამოცანის ავტორი: თოლორაია თეიმურაზი)

დაფაზე წერია ნებისმიერი სამი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი. ერთ სვლაზე შენ შეგიძლია წაშალო ნებისმიერი ორი მათგანი, ვთქვათ, x და y , და, თუ $x \leq y$, მათ ნაცვლად დაწერო შემდეგი ორი რიცხვი: $2x$ და $y - x$. დაამტკიცე, რომ ამ სვლის რამდენიმეჯერ შესრულების შემდეგ შენ შეგიძლია მიიღო რიცხვთა სამეული, რომელშიც ერთერთი ნულის ტოლი იქნება.

ამოხსნა:

ვაჩვენოთ, რომ ჩვენ შეგვიძლია სვლების ისე ჩატარება, რომ მინიმალური ელემენტი შევამციროთ. კონკრეტულად კი, თუ დაფაზე წერია შემდეგი სამი რიცხვი: $x \leq y \leq z$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ სამეული, რომელშიც უმცირესი ელემენტი იქნება y -ის x -ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი.

ვთქვათ, $y = q \cdot x + r$, სადაც q და r მთელი რიცხვებია და $0 \leq r < x$. გავშალოთ q რიცხვი ორობით სისტემაში:

$$q = b_k \cdot 2^k + b_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$$

სადაც $b_i \in \{0, 1\}$ და $b_k = 1$.

ჩავთვალოთ, რომ რიცხვები x , y და z რიცხვები დაფაზე ამავე თანმიმდევრობით არის ჩამოწერილი და ყველა ეტაპზე ახალი სამეულიც იმავე თანმიმდევრობით ჩამოვწეროთ, ანუ გაორმაგებული რიცხვი იმ რიცხვის ადგილას დავწეროთ, რომელიც გაორმაგდა და შემცირებული რიცხვი იმ რიცხვის ადგილას დავწეროთ რომელიც შემცირდა.

ჩავატაროთ შემდეგი $k + 1$ რაოდენობის სვლა: ყოველი სვლა იყოს შემდეგი ორიდან ერთერთი:

1. მარცხენა რიცხვი გამოვაკლოთ შუა რიცხვს და მარცხენა რიცხვი გავაორმაგოთ.
2. მარცხენა რიცხვი გამოვაკლოთ მარჯვენა რიცხვს და მარცხენა რიცხვი გავაორმაგოთ.

ეტაპობრივად გამოვყვეთ მთელ რიცხვებს 0-იდან k -ს ჩათვლით და ყოველი $i = 0, 1, 2, \dots, k$ შემთხვევისთვის თუ $b_i = 1$, მაშინ ჩავატაროთ 1-ელი სვლა, ანუ მარცხენა რიცხვი გამოვაკლოთ შუა რიცხვს და მარცხენა რიცხვი გავაორმაგოთ, ხოლო თუ $b_i = 0$, მაშინ ჩავატაროთ მე-2 სვლა, ანუ მარცხენა რიცხვი გამოვაკლოთ მარჯვენა რიცხვს და მარცხენა რიცხვი გავაორმაგოთ.

დავაკვირდეთ ამ პროცესში თუ როგორ იცვლება მარცხენა რიცხვი. ის ყოველთვის ორმაგდება. i -ური სვლის ჩატარების შემდეგ მისი მნიშვნელობა იქნება $2^i \cdot x$.

დავაკვირდეთ როგორ იცვლება შუა რიცხვი. საწყის მომენტში ის არის $q \cdot x + r$. ანუ

$$b_k \cdot 2^k \cdot x + b_{k-1} \cdot 2^{k-1} \cdot x + \dots + b_1 \cdot 2^1 \cdot x + b_0 \cdot 2^0 \cdot x$$

ხოლო, როცა $b_i = 1$, მას მაშინ აკლდება $2^i \cdot x$, ანუ შუა რიცხვს შესაკრებები ეტაპობრივად აკლდება და საბოლოოდ მისგან დარჩება მხოლოდ ნაშთი r .

უნდა დავასაბუთოთ, რომ ამ $k + 1$ სვლის ჩატარება ყველა ეტაპზე შესაძლებელი იყო. ანუ უნდა ვაჩვენოთ, რომ მარცხენა რიცხვი ყოველთვის არანაკლები იქნებოდა შუა რიცხვზეც და მარჯვენა რიცხვზეც.

ცხადია, რომ შუა რიცხვი სულ მცირე არის $2^k \cdot x$. ხოლო მარცხენა რიცხვი კი ბოლო სვლის ჩატარებამდე ხდება $2^k \cdot x$. ესე იგი შუა რიცხვი ყველა ეტაპზე არანაკლები იყო ვიდრე მარცხენა რიცხვი.

მარჯვენა რიცხვი საწყის ეტაპზე იყო არანაკლები შუა რიცხვისა. ანუ მისი მნიშვნელობა სულ მცირე იყო $b_k \cdot 2^k \cdot x + b_{k-1} \cdot 2^{k-1} \cdot x + \dots + b_1 \cdot 2^1 \cdot x + b_0 \cdot 2^0 \cdot x$. უკიდურეს შემთხვევაში მარჯვენა რიცხვს შესაძლოა გამოკლებოდა მარცხენა რიცხვი k -ჯერ, რადგან ზუსტად ვიცით, რომ $(k + 1)$ -ე სვლაზე ის აკლდება შუა რიცხვს და არა მარჯვენას. ანუ მარჯვენა რიცხვს მაქსიმუმ გამოაკლდებოდა შემდეგი ჯამი:

$$2^0 \cdot x + 2^1 \cdot x + \dots + 2^{k-1} \cdot x = (2^k - 1) \cdot x < 2^k \cdot x \leq y \leq z$$

ესე იგი მარჯვენა რიცხვი ყველა ეტაპზე არანაკლები იქნებოდა ვიდრე მარჯვენა რიცხვი და სვლის ჩატარებას პრობლემა არ შეექმნებოდა.

რადაც ეტაპზე მარჯვენა რიცხვი შესაძლოა ჩამოცდეს შუა რიცხვს თუმცა ამას არანაირი არსებითი მნიშვნელობა არ აქვს ალგორითმის მუშაობისთვის.

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ სამეულში უმცირესი რიცხვი მუდმივად შეგვიძლია შევამციროთ, მანამ სანამ ნულის ტოლი არ გახდება.

ამოცანა 6:

(ამოცანის ავტორი: გიორგი არაბიძე)

მოცემულია $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეცია, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$. ცნობილია, რომ არსებობს AB მონაკვეთის ისეთი შიდა E წერტილი, რომლისთვისაც EC და BD წრფეები ურთიერთმართობულია. ვთქვათ, M არის ED მონაკვეთის შუა წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირი, რომლის ცენტრი არის C და გადის B წერტილზე, ეხება AME სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს.

ამოხსნა:

ვთქვათ T არის BM წრფისა და AME სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის გადაკვეთის წერტილი, რომელიც განსხვავებული M წერტილისგან, ხოლო F არის CE და BD მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი.

რადგან $\angle EFD + \angle EAD = 180^\circ$, ამიტომ $AEFD$ ოთხკუთხედი ჩაიხაზება წრეწირში. აქედან გამომდინარე

$$\angle AFD = \angle AED = \angle ATM.$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\angle BFA = 180^\circ - \angle AFD = 180^\circ - \angle ATM = \angle BTA$$

მივიღეთ, რომ $BFTA$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი. ამიტომ

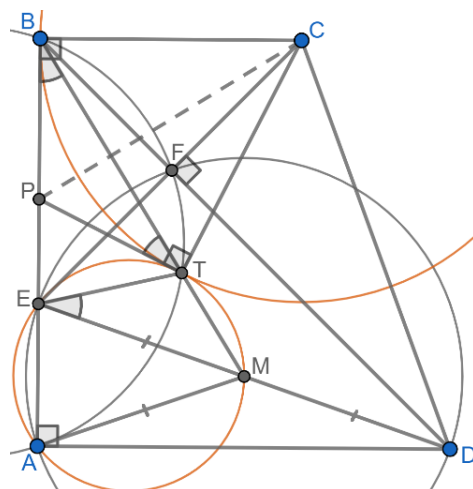
$$\angle BAM = \angle AEM = \angle AFD = \frac{\widehat{BFA}}{2}$$

რადგან $\angle BAM = \frac{\widehat{BFA}}{2}$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ MA წრფე A წერტილში ეხება $BFTA$ ოთხკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს. აქედან გამომდინარე გვექნება ტოლობა:

$$EM^2 = MA^2 = MT \cdot MB$$

რადგან $EM^2 = MT \cdot MB$, ესე იგი ETB სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეხება EM წრფეს E წერტილში, ანუ $\angle TEM = \angle ABM$.

განვიხილოთ წრფე, რომელიც T წერტილში ეხება AME სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს. ვთქვათ, ეს წრფე AB წრფეს კვეთს P წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ ეს წრფე ასევე შეეხება წრეწირს, რომლის ცენტრი არის C და გადის B წერტილზე.



ETMA ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისათვის *PTB* არის *PT* მხებითა და *TM* ქორდით შედგენილი კუთხე. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\angle PTB = \frac{\widehat{TM}}{2} = \angle TEM = \angle ABM$$

მივიღეთ, რომ $PB = PT$. აქედან გამომდინარე ჯერ კიდევ არ შეგვიძლია იმის თქვა, რომ *PT* წრფე ეხება წრეწირს, რომლის ცენტრი არის *C* და გადის *B* წერტილზე, რადგან ჯერ არ ვიცით, ეს წრეწირი საერთოდ გადის თუ არა *T* წერტილზე. ჯერჯერობით ვიცით, რომ $PB = PT$.

რადგან *PT* არის *ETMA* ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები, ამიტომ $PT^2 = PE \cdot PA$. აქედან გამომდინარე

$$PB^2 = PT^2 = PE \cdot PA$$

ტოლობა $PB^2 = PE \cdot PA$, გვაძლევს იმის დასკვნის საშუალებას, რომ *P* წერტილი მდებარეობს *B* წერტილისა და *AEFD* ოთხკუთხედიზე შემოხაზული წრეწირის რადიკალურ ღერძზე.

EBC მართკუთხა სამკუთხედში *BF* სიმაღლეა. ამიტომ $CB^2 = CF \cdot CE$. ეს კი ნიშნავს, რომ *C* წერტილიც მდებარეობს *B* წერტილისა და *AEFD* ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიკალურ ღერძზე. ესე იგი *PC* წრფე არის ეს რადიკალური ღერძი და რადგან *M* არის *AEFD* ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, ამიტომ *PC* მართობულია *BM* წრფის.

რადგან $PB = PT$ ესე იგი *P* წერტილი მდებარეობს *BT* მონაკვეთის შუა მართობზე. ესე იგი *PC* წრფე არის *PT* მონაკვეთის შუა მართობი. ესე იგი *PBCT* ოთხკუთხედი არის სიმეტრიული *PC* წრფის მიმართ. აქედან გამომდინარე $CB = CT$ და $\angle CTP = 90^\circ$. ეს კი უკვე ნიშნავს, რომ, *PT* წრფე ეხება წრეწირს, რომლის ცენტრი არის *C* და გადის *B* წერტილზე.

რადგან წრეწირიც, რომლის ცენტრი არის *C* და გადის *B* წერტილზე, წრეწირიც, რომელიც შემოხაზული *AME* სამკუთხედზე, ეხებიან ერთი და იგივე *PT* წრფეს ერთი და იგივე *T* წერტილში, ესე იგი ეს ორი წრეწირი ერთმანეთსაც ეხება.