



ოილერის ოლიმპიადა. მეორე ტური. (პირველი სესია)

10 მაისი, 2026

ამოცანა 1:

რამდენიმე დადებითი რიცხვის *საშუალო სიმრავლე* ვუწოდოთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ამ რიცხვების საშუალო არითმეტიკულისაგან, გეომეტრიულისაგან, ჰარმონიულისაგან და კვადრატულისაგან. რამდენიმე დადებით რიცხვში ერთერთს დავარქვათ *გამორჩეული*, თუ ის ეკუთვნის მის გარდა დანარჩენი ყველა რიცხვის საშუალო სიმრავლეს. დაამტკიცეთ, რომ

ა) თუ რომელიმე შვიდ დადებით რიცხვში ექვსი მაინც არის გამორჩეული, მაშინ მეშვიდე რიცხვიც გამორჩეულია.

ბ) არ არსებობს შვიდი წყვილწყვილად განსხვავებული დადებითი რიცხვი, რომელთა შორის ზუსტად ხუთი რიცხვი არის გამორჩეული.

ამოცანა 2:

ვთქვათ, D არის არატოლფერდა ABC სამკუთხედის BC გვერდის შუა წერტილი. ცნობილია, რომ ABD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისადმი A და B წერტილებზე გავლებული მხეხვები იკვეთებიან P წერტილში, ხოლო ACD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისადმი A და C წერტილებზე გავლებული მხეხვები იკვეთებიან Q წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ PQ მონაკვეთის შუა წერტილი მდებარეობს BC წრფეზე.

ამოცანა 3:

იპოვეთ დადებით მთელ რიცხვებში განსაზღვრული ყველა $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

$$1) \quad f(f(f(n))) + 4n = 3 \cdot f(f(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2) \quad f(f(n)) \leq f(n) + 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) ყოველი დადებითი მთელი n რიცხვისთვის არსებობს უსასრულოდ ბევრი დადებითი მთელი რიცხვი m , რომლისთვისაც $\underbrace{f(f(\dots f(n) \dots))}_m$ იყოფა 2^m -ზე.

წერის ხანგრძლივობა: 4 საათი.

თითოეული ამოცანა ფასდება მაქსიმუმ 7 ქულით.