ოილერის ოლიმპიადა - 2023. მეორე ტური. (მეორე სესია)

ამოცანა 4:

$ABCD$ ტრაპეციაში AD და BC წრფეები პარალელურია. ვთქვათ, M არის AD გვერდის შუა წერტილი, ხოლო C_1 არის C წერტილის სიმეტრიული წერტილი BD დიაგონალის მიმართ. ცნობილია, რომ BM მონაკვეთი AC დიაგონალს კვეთს K წერტილში და C_1K სხივი BD დიაგონალს კვეთს H წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ AHD კუთხე მართია.

ამოცანა 5:

იპოვეთ ნამდვილი M რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $[4;6]$ ინტერვალში მდებარე ნებისმიერი $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ და $[9;12]$ ინტერვალში მდებარე ნებისმიერი $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ რიცხვებისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2} \leq M \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{2023}b_{2023})$$

ამოცანა 6:

ვთქვათ, $N > 1$ რაიმე მთელი რიცხვია. თავისუფალ უნივერსიტეტში ჩააბარა N^2 რაოდენობის პირველკურსელმა, რომელთაგან არცერთი ორი ერთმანეთს არ იცნობს. ცნობილია, რომ მათ გაცნობა შეუძლიათ მხოლოდ წვეულებებზე, რომელსაც დროდადრო აწყობს უნივერსიტეტის ადმინისტრაცია. ადმინისტრაციის მიზანია, რომ არ არსებობდეს N რაოდენობის პირველკურსელი, რომელთა შორის არცერთი ორი არ იცნობს ერთმანეთს. ცნობილია, რომ ერთი წვეულების მოსაწყობად, რომელშიც მოწვეული იქნება m რაოდენობის პირველკურსელი, საჭიროა $(m^2 - m)$ ლარი. იპოვეთ თანხის ის მინიმალური რაოდენობა, რომლის დახარჯვითაც ადმინისტრაცია შეძლებს თავისი მიზნის განხორციელებას.

წერის ხანგრძლივობა: 3 სთ.

თითოეული ამოცანა ფასდება მაქსიმუმ 7 ქულით.