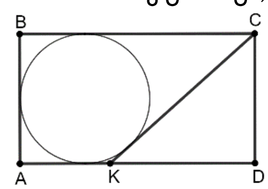
ოილერის ოლიმპიადა - 2023. პირველი ტური. (პირველი სესია)

ამოხსნები

ამოცანა 1: *წრეწირი მართკუთხედში* (1 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)



მოცემულია $ABCD$ მართკუთხედი, რომელშიც $BC = 2 \cdot AB$. ვთქვათ, ω არის წრეწირი, რომელიც ეხება AB, BC და AD გვერდებს. C წერტილიდან ω წრეწირისადმი გავლებული მხები AD მონაკვეთს გადაკვეთს K წერტილში. იპოვეთ $\frac{AK}{KD}$.

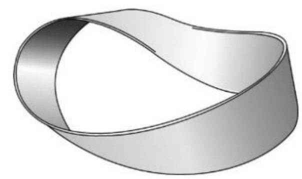
ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{AK}{KD} = \frac{1}{2}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $AB \equiv a$ და $AK \equiv x$. რადგან $ABCD$ ოთხკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, ამიტომ $AB + CK = BC + AK$. ესე იგი $CK = BC + AK - AB = 2a + x - a = a + x$. ასევე, $KD = 2a - x$. მართკუთხა DCK სამკუთხედში პითაგორას თეორემით: $KD^2 + DC^2 = CK^2$. ანუ $(2a - x)^2 + a^2 = (a + x)^2$. ტოლობის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ: $4a^2 = 6ax$. ანუ $x = \frac{2}{3}a$. აქედან კი ვიღებთ, რომ $KD = \frac{4}{3}a$. ესე იგი $\frac{AK}{KD} = {\frac{2}{3}a}\Big/{\frac{4}{3}a} = \frac{1}{2}$.

ამოცანა 2: *<u>რწყილი და ჭიანჭველა მობიუსის ფურცელზე</u>* $(\sqrt{3}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: ჩიტიშვილი ლია)



მოსწავლემ აიღო მართკუთხედის ფორმის ფურცელი, რომელსაც აქვს 1 მეტრის ტოლი სიგრძე და 5 სანტიმეტრის ტოლი სიგანე. მან ფურცლის ბოლოები ერთმანეთთან მიიტანა, ერთერთი ბოლო მოაბრუნა 180^0 გრადუსით და ზედაპირები ერთმანეთზე გადააწება ისე, რომ გადაწებებული ადგილის სიგანე გამოვიდა 2 სანტიმეტრი. მოსწავლემ შექმნა ფიგურა, რომელსაც მობიუსის ფურცელს უწოდებენ. ამ ფურცლის ერთ წერტილში (ერთი და იგივე მხარეს) მოსწავლემ დასვა რწყილი და ჭიანჭველა. ცნობილია, რომ თუ რწყილი და ჭიანჭველა იმოძრავებენ მობიუსის ფურცელზე სხვადასხვა მიმართულებით, მაშინ ისინი ერთმანეთს შეხვდებიან 2 წუთში, ხოლო თუ იმოძრავებენ ერთი და იგივე მიმართულებით, მაშინ ისინი შეხვდებიან 7 წუთში. იპოვეთ რწყილის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ ის ჭიანჭველაზე უფრო სწრაფია. (რწყილიც და ჭიანჭველაც მუდმივი სიჩქარეებით მოძრაობენ).

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: $63\,\frac{\text{სმ.}}{\text{წთ.}}$.

ცხადია, იმისათვის რომ მობიუსის ფურცელზე მოძრავი წერტილი დაუბრუნდეს საწყის პოზიციას, უნდა გაიროს ორჯერ მეტი მანძილი, ვიდრე იმ ფურცლის სიგრძეა, რასაც სიგანეზე გაჭრით მივიღებდით. ჩვენს შემთხვევაში ეს მანძილი გამოდის $2 \cdot (100 - 2) = 196$ სანტიმეტრი.

ვთქვათ რწყილის სიჩქარეა $x\,\frac{\text{სმ.}}{\text{წთ.}}$, ხოლო ჭიანჭველასი - $y\,\frac{\text{სმ.}}{\text{წთ.}}$. რადგან საპირისპირო მიმართულებით მოძრაობისას ისინი 2 წუთში ხვდებიან ერთმანეთს, ამიტომ $2x + 2y = 196$. ანუ $x + y = 98$. რადგან ერთი მიმართულებით მოძრაობისას ისინი 7 წუთში ხვდებიან ერთმანეთს, ამიტომ $7x - 7y = 196$. ანუ $x - y = 28$. საბოლოოდ ცხადია, რომ $x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} = \frac{98+28}{2} = \frac{126}{2} = 63$.

ამოცანა 3: *ლეონარდის საათი* $(\sqrt{5}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

ლეონარდის საათს მხოლოდ საათების და წუთების ისრები აქვს. დაადგინეთ, დღე-ღამეში ზუსტად რამდენი წუთის განმავლობაში იქნება ისრებს შორის კუთხის ზომა არაუმეტეს 1 გრადუსისა. (იგულისხმება, რომ ორივე ისარი მოძრაობს უწყვეტად და მუდმივი სიჩქარით)

ამოხსნა

პასუხი: 8 წუთი.

დავადგინოთ საათის ისრების სიჩქარეები. წუთების ისარი 60 წუთში გადის 360 გრადუსს. ესე იგი 1 წუთში გადის 6 გრადუსს. ხოლო საათების ისარი 12 საათში გადის 360 გრადუსს. ესე იგი 1 საათში გადის 30 გრადუსს, ანუ 1 წუთში გადის 0,5 გრადუსს. გამოვიდა, რომ 1 წუთში წუთების ისარი 5,5 გრადუსით მეტს გადის, ვიდრე საათების ისარი. ახლა გავარკვიოთ რა დროის განმავლობაში გრძელდება ის პროცესი, როცა დიდი ისარი მიუახლოვდება პატარა ისარს 1 გრადუსით, შემდეგ „გადაუვლის" და გაცდება 1 გრადუსით. ცხადია, ეს პროცესი გრძელდება იმ დროის განმავლობაში, რა დროშიც წუთების ისარი ასწრებს 2 გრადუსით მეტის გავლას, ვიდრე საათების ისარი გადის. გვექნება შემდეგი პროპორცია:

1 წუთი — 5,5 გრადუსი

? წუთი — 2 გრადუსი

პროპორციის თვისების თანახმად, ცხადია, რომ ეს პროცესი გაგრძელდება $\frac{1\cdot 2}{5{,}5}=\frac{4}{11}$ წუთის განმავლობაში.

გასარკვევი დარჩა ის თუ რამდენჯერ გადაუვლის წუთების ისარი საათების ისარს დღე-ღამის განმავლობაში. შევნიშნოთ, რომ 12 საათის განმავლობაში წუთების ისარი გააკეთებს 12 წრეს, ხოლო საათების ისარი 1 წრეს, ანუ 12 საათში წუთების ისარი 11-ჯერ გადაუვლის საათების ისარს, ხოლო დღე-ღამის განმავლობაში გადაუვლის 22-ჯერ. საბოლოოდ, დღე-ღამეში ისრებს შორის კუთხის ზომა იქნება არაუმეტეს 1 გრადუსისა $\frac{4}{11}\cdot 22=8$ წუთის განმავლობაში.

ამოცანა 4: $\underline{2d.4m.2023}$ ($\sqrt{7}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: ხიმშიაშვილი გოგი)

მოცემულია განსხვავებული დადებითი მთელი რიცხვები, რომელთა ჯამი 2023-ის ტოლია. ამ რიცხვებიდან ლუწების რაოდენობა არის d, ხოლო კენტების რაოდენობა არის m. იპოვეთ $2d + 4m$ გამოსახულების შესაძლო მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 200.

d-ცალი განსხვავებული დადებითი ლუწი რიცხვის ჯამი მინიმუმ არის $2 + 4 + 6 + \cdots + 2d = d(d+1)$, ხოლო m-ცალი განსხვავებული დადებითი კენტი რიცხვის ჯამი მინიმუმ არის $1 + 3 + \cdots + 2m - 1 = m^2$. ესე იგი $2023 \geq d^2 + d + m^2$. ანუ $2023 + \frac{1}{4} \geq \left(d + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2$.

კოში-შვარცის (https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Schwarz_inequality#R2_-_The_plane) უტოლობის გამოყენებით გვექნება შემდეგი:

$$\left(2\left(d + \frac{1}{2}\right) + 4m\right)^2 \leq (2^2 + 4^2)\left(\left(d + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2\right) \leq (2^2 + 4^2)\left(2023 + \frac{1}{4}\right) = 40465 < 40804 = 202^2$$

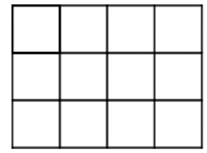
ესე იგი, $2d + 1 + 4m < 202$, ანუ $2d + 4m < 201$. ცხადია, რომ $2d + 4m$ ლუწი რიცხვია და, შესაბამისად, $2d + 4m \leq 200$. იმისათვის, რომ $(2d + 4m)$-ის მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა იყოს 200, ამისათვის უნდა არსებობდეს ამ მაქსიმუმის მიღწევის მაგალითი. ასეთი მაგალითი კი არის შემდეგი: პირველი $d = 18$ ლუწი რიცხვისა და პირველი $m = 41$ კენტი რიცხვის ჯამი შეადგენს 2023-ს. მართლაც

$$2 + 4 + \cdots + 36 + 1 + 3 + \cdots + 81 = 18^2 + 18 + 41^2 = 324 + 18 + 1681 = 2023$$

და, ასევე, $2d + 4m = 2 \cdot 18 + 4 \cdot 41 = 36 + 164 = 200$.

ამოცანა 5: *<u>სამფერიანი შეღებვა</u>* $(\sqrt{10}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: Prudencio Guerrero Fernández)



დაადგინეთ, რამდენი განსხვავებული გზით შეიძლება შეიღებოს 3×4 ზომის მართკუთხა ცხრილის ყველა უჯრა სამი ფერის გამოყენებით ისე, რომ არცერთი ორი უჯრა არ იყოს ერთი ფერის, რომელთაც საერთო გვერდი აქვთ? (სამივე ფერის გამოყენება აუცილებელი არ არის)

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 1122.

განვიხილოთ 3×1 ზომის სვეტი. შეღებილ სვეტს დავარქვათ *„პირველი ტიპის“*, თუ სამივე უჯრა განსხვავებული ფერითაა შეღებილი და დავარქვათ *„მეორე ტიპის“*, თუ პირველი და მესამე უჯრა ერთი და იგივე ფერითაა შეღებილი. ცხადია, თუ ვითხოვთ, რომ მეზობელი უჯრების ფერები განსხვავდებოდნენ, მაშინ რაიმე მესამე ტიპის სვეტი აღარ იარსებებს. ვთქვათ, a_n არის $3 \times n$ ზომის ცხრილის ისეთ შეღებვათა რაოდენობა, რომლის ბოლო (მარჯვენა) სვეტი პირველი ტიპისაა, ხოლო b_n არის $3 \times n$ ზომის ცხრილის ისეთ შეღებვათა რაოდენობა, რომლის ბოლო სვეტი მეორე ტიპისაა. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $a_4 + b_4$.

ცხადია, რომ $a_1 = 6$ და $b_1 = 6$. ასევე, ცხადია, რომ თუ რაიმე შეღებილი სვეტი პირველი ტიპისაა და მისი მეზობელი სვეტის შეღებვაც გვინდა რომ პირველი ტიპის იყოს, მაშინ ამისათვის მეზობელი სვეტის შეღებვის ორი ვარიანტი არსებობს. (პირობითად ფერები განვასხვავოთ x, y და z ნიშნულებით).

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} y \\ z \\ x \end{matrix} \qquad \text{ან} \qquad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} z \\ x \\ y \end{matrix}$$

ანუ პირველი ტიპის სვეტს რომ მოსდევდეს ისევ პირველი ტიპის სვეტი, ამის ორი ვარიანტი არსებობს. ანალოგიურად ვნახავთ, რომ პირველი ტიპის სვეტს, რომ მოსდევდეს მეორე ტიპის სვეტი ამის ორი ვარიანტი არსებობს.

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} y \\ x \\ y \end{matrix} \qquad \text{ან} \qquad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} y \\ z \\ y \end{matrix}$$

მეორე ტიპის სვეტს რომ მოსდევდეს პირველი ტიპის სვეტი, ამის ორი ვარიანტი არსებობს:

$$\begin{matrix} x \\ y \\ x \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} y \\ x \\ z \end{matrix} \qquad \text{ან} \qquad \begin{matrix} x \\ y \\ x \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} z \\ x \\ y \end{matrix}$$

ხოლო მეორე ტიპის სვეტს რომ მოსდევდეს ისევ მეორე ტიპის სვეტი, ამის სამი ვარიანტი არსებობს:

$$\begin{matrix} x \\ y \\ x \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} y \\ x \\ y \end{matrix} \quad \text{ან} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ x \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} y \\ z \\ y \end{matrix} \quad \text{ან} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ x \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} z \\ x \\ z \end{matrix}$$

ამ დაკვირვების შედეგად გვექნება, რომ $a_{n+1} = 2a_n + 2b_n$ და $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. აქედან გამომდინარე გვექნება ტოლობები: $a_2 = 2a_1 + 2b_1 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24$ და $b_2 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot b_1 = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 30$. ახლა a_3 და b_3 გამოვთვალოთ: $a_3 = 2a_2 + 2b_2 = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 30 = 108$ და $b_3 = 2a_2 + 3b_2 = 2 \cdot 24 + 3 \cdot 30 = 138$. ბოლოს ვიპოვოთ პასუხის მისაღებად საჭირო a_4 და b_4 რიცხვები. $a_4 = 2a_3 + 2b_3 = 2 \cdot 108 + 2 \cdot 138 = 492$ და $b_4 = 2a_3 + 3b_3 = 2 \cdot 108 + 3 \cdot 138 = 630$. საბოლოო პასუხი კი არის: $a_4 + b_4 = 492 + 630 = 1122$.