SCIENTIA • LABOR • LIBERTAS

თავისუფალი უნივერსიტეტი

ოილერის ოლიმპიადა. მეორე ტური. (პირველი სესია)

20 აპრილი, 2024

ამოცანა 1:

იპოვეთ დადებით მთელ რიცხვთა ყველა (a, b, c) სამეული, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$a! + b! = c!!$$

$\big((2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k, \quad (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)\big)$

ამოცანა 2:

იპოვეთ $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ და $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ფუნქციების ყველა წყვილი, რომელთათვისაც ტოლობები

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$

$$g(x+y) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$

სამართლიანია ყოველი რაციონალური x და y რიცხვებისთვის.

($\mathbb{Q}$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო $\mathbb{R}$ - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე)

ამოცანა 3:

მოცემულია ამოზნექილი $ABCD$ ოთხკუთხედი, რომელშიც $AC > BD$. ამ ოთხკუთხედის სიბრტყეში აღებულია ისეთი M და N წერტილები, რომ ABM და CDN სამკუთხედები ტოლგვერდაა და MD და NA მონაკვეთები კვეთენ, შესაბამისად, AB და CD წრფეებს. ასევე, ამავე სიბრტყეში აღებულია ისეთი P და Q წერტილები, რომ ADP და BCQ სამკუთხედები ტოლგვერდაა, მაგრამ ამ შემთხვევაში PB და QA მონაკვეთები **არ** კვეთენ, შესაბამისად, AD და BC წრფეებს.

დაამტკიცეთ, რომ $MN = AC + BD$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $PQ = AC - BD$.

წერის ხანგრძლივობა: 3 საათი.

თითოეული ამოცანა ფასდება მაქსიმუმ 7 ქულით.