



ოილერის ოლიმპიადა. მეორე ტური. (პირველი სესია)

9 აპრილი, 2025

ამოცანა 1:

დადებით მთელ რიცხვთა ურთიერთმართივ (n, m) წყვილს ვუწოდოთ *გადაჯაჭვული*, თუ n -ის ნებისმიერ ორ ერთზე მეტ გამყოფს შორის მოიძებნება m -ის გამყოფი და, ასევე, m -ის ნებისმიერ ორ ერთზე მეტ გამყოფს შორის მოიძებნება n -ის გამყოფი. მაგალითად $(63, 64)$ წყვილი გადაჯაჭვულია.

ა) იპოვეთ უდიდესი k რიცხვი, რომლისთვისაც მოიძებნება გადაჯაჭვული (n, m) წყვილი და nm ნამრავლი წარმოადგენს პირველი k -ცალი მარტივი რიცხვის ნამრავლს.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ისეთი გადაჯაჭვული (n, m) წყვილი, რომლისთვისაც nm ნამრავლი წარმოადგენს 2025-ცალი განსხვავებული მარტივი რიცხვის ნამრავლს.

გ) დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ისეთი გადაჯაჭვული (n, m) წყვილი, რომლისთვისაც n -ის ნატურალურ გამყოფთა რაოდენობა მეტია 2025-ზე.

ამოცანა 2:

წრფეზე აღებულია A, B, C და D წერტილები ამავე თანმიმდევრობით, ხოლო წრფის გარეთ აღებულია E და F წერტილები ისე, რომ $EA = EB$, $FC = FD$ და $EF \parallel AD$. ვთქვათ, ABF და CDE სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები იკვეთებიან M და N წერტილებში, ხოლო ACF და BDE სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები იკვეთებიან P და Q წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ

ა) MN წრფე გაივლის EF მონაკვეთის შუა წერტილზე.

ბ) PQ წრფე გაივლის EF მონაკვეთის შუა წერტილზე.

ამოცანა 3:

იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. თუ რაიმე ნამდვილი a და b რიცხვებისთვის $a^2 + b^2 = 1$, მაშინ $f(x) + f(y) \geq f(ax + by)$ ყოველი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის.

2. ნებისმიერი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის მოიძებნება ნამდვილი a და b რიცხვები, რომელთათვისაც $a^2 + b^2 = 1$ და $f(x) + f(y) = f(ax + by)$.

წერის ხანგრძლივობა: 3 საათი.

თითოეული ამოცანა ფასდება მაქსიმუმ 7 ქულით.