ოილერის ოლიმპიადა - 2023. მეორე ტური. (მეორე სესია)

ამოხსნები

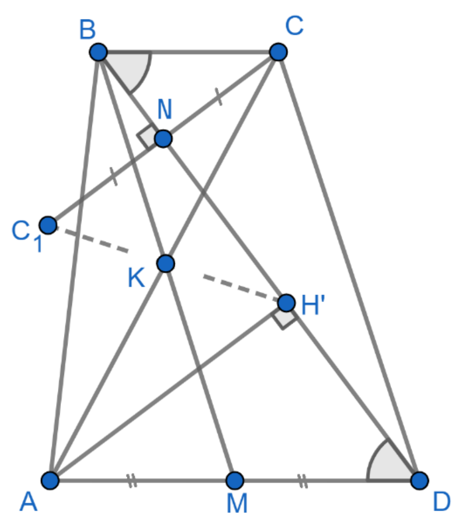
ამოცანა 4:

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

$ABCD$ ტრაპეციაში AD და BC წრფეები პარალელურია. ვთქვათ, M არის AD გვერდის შუა წერტილი, ხოლო C_1 არის C წერტილის სიმეტრიული წერტილი BD დიაგონალის მიმართ. ცნობილია, რომ BM მონაკვეთი AC დიაგონალს კვეთს K წერტილში და C_1K სხივი BD დიაგონალს კვეთს H წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ AHD კუთხე მართია.

პ ი რ ვ ე ლ ი   ა მ ო ხ ს ნ ა

C_1C და BD წრფეების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ N-ით. ვთქვათ, A წერტილის გეგმილი BD წრფეზე არის H'. დავამტკიცოთ, რომ $H' = H$. ეს კი დამტკიცებული გამოვა, თუ ვაჩვენებთ, რომ C_1, K და H' წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.



ცხადია, რომ $\angle CBN = \angle ADH'$. ამიტომ

$$\frac{CN}{AH'} = \frac{BC}{AD}$$

ასევე, რადგან $ABCM$ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა, სრულდება შემდეგი ტოლობა:

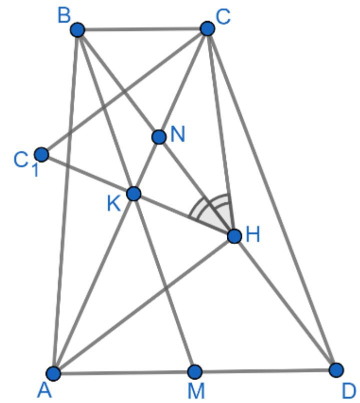
$$\frac{CK}{AK} = \frac{BC}{AM}$$

მივიღეთ, რომ

$$\frac{CC_1}{AH'} = 2 \cdot \frac{CN}{AH'} = 2 \cdot \frac{BC}{AD} = 2 \cdot \frac{BC}{2 \cdot AM} = \frac{BC}{AM} = \frac{CK}{AK}$$

რადგან AC_1CH' ოთხკუთხედი ტრაპეციაა, ამიტომ დიაგონალები ერთმანეთს გაყოფენ ფუძეების სიგრძეების შეფარდებით. ანუ C_1H' წრფე AC მონაკვეთს გაყოფს იგივე შეფარდებით, როგორც K წერტილი ყოფს. ესე იგი C_1, K და H' წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ. ანუ $H' = H$ და $\angle AHD = 90°$.

მ ე ო რ ე   ა მ ო ხ ს ნ ა



AC და BD დიაგონლების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ N-ით. რადგან $BC \parallel AD$ და $AM = MD$, ამიტომ BA, BD, BM და BC სხივები ქმნიან ჰარმონიულ ფანქარს. აქედან გამომდინარე A, K, N და C წერტილთა განლაგება ჰარმონიულია. C_1 წერტილის სიმეტრიულობის გამო $\angle KHN = \angle CHN$. ეს კი ნიშნავს, რომ A წერტილი მდებარეობს KHC კუთხის მოსაზღვრე კუთხის ბისექტრისაზე. ესე იგი $\angle AHN = 90°$.

კ ო მ ე ნ ტ ა რ ი: ამოხსნის გასაგებად საჭიროა მცირე ცოდნა ჰარმონიული განლაგებების შესახებ: https://alexanderrem.weebly.com/uploads/7/2/5/6/72566533/projectivegeometry.pdf

ამოცანა 5:

(ამოცანის ავტორი: მელიქიძე ზაზა)

იპოვეთ ნამდვილი M რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $[4;6]$ ინტერვალში მდებარე ნებისმიერი $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ და $[9;12]$ ინტერვალში მდებარე ნებისმიერი $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ რიცხვებისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2} \le M \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{2023} b_{2023})$$

ამოხსნა

პასუხი: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი i ინდექსი 1-დან 2023-ის ჩათვლით. რადგან $4 \le a_i \le 6$ და $9 \le b_i \le 12$, ამიტომ $\frac{1}{3} \le \frac{a_i}{b_i} \le \frac{2}{3}$ და შესაბამისად $\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{2}{3}\right) \le 0$, სადაც ტოლობა მიღწევადია, როცა $\frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{3}$ ან $\frac{a_i}{b_i} = \frac{2}{3}$, რომელიც თავის მხრივ ტოლფასია პირობის: $\begin{cases} a_i = 4 \\ b_i = 12 \end{cases}$ ან $\begin{cases} a_i = 6 \\ b_i = 9 \end{cases}$. თუ უკანასკნელ უტოლობას გავამარტივებთ, მივიღებთ $9a_i^2 + 2b_i^2 \le 9a_i b_i$. ყოველი ინდექსისთვის მიღებული 2023 ცალი უტულობა ავჯამოთ და მივიღებთ შედეგს:

$$9(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2) + 2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2) \le 9(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{2023} b_{2023})$$

კოშის უტოლობის თანახმად გვექნება:

$$2 \cdot \sqrt{9(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2)} \cdot \sqrt{2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2)} \le 9(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2) + 2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2)$$

სადაც ტოლობა მიიღწევა, როცა $9(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2) = 2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2)$. მივიღეთ, რომ

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2} \le \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{2023} b_{2023})$$

თუ ვაჩვენებთ, რომ ამ უკანასკნელ უტოლობაში ტოლობა მიღწევადია, მაშინ გამოვა რომ M რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა არის $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

იმ ინდექსთა რაოდენობა, სადაც $\begin{cases} a_i = 4 \\ b_i = 12 \end{cases}$ იყოს k, ხოლო დანარჩენი $(2023 - k)$ რაოდენობის ინდექსისთვის $\begin{cases} a_i = 6 \\ b_i = 9 \end{cases}$. ჩვენი მიზანია დავასახელოთ ისეთი მთელი რიცხვი k, რომელიც მოთავსებულია $[1;2023]$ შუალედში და რომლისთვისაც $9(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2) = 2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2)$. ცხადია, რომ $9(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2) = 9\big(16k + 36(2023 - k)\big)$ და $2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2023}^2) = 2\big(144k + 81(2023 - k)\big)$. ანუ $9\big(16k + 36(2023 - k)\big) = 2\big(144k + 81(2023 - k)\big)$. საიდანაც $k = 1071$. ესე იგი ტოლობა მიღწევადია, ანუ M რიცხვის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა, არის $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

ამოცანა 6:

(ამოცანის ავტორი: მაჭარაშვილი ლუკა)

ვთქვათ, $N > 1$ რაიმე მთელი რიცხვია. თავისუფალ უნივერსიტეტში ჩააბარა N^2 რაოდენობის პირველკურსელმა, რომელთაგან არცერთი ორი ერთმანეთს არ იცნობს. ცნობილია, რომ მათ გაცნობა შეუძლიათ მხოლოდ წვეულებებზე, რომელსაც დროდადრო აწყობს უნივერსიტეტის ადმინისტრაცია. ადმინისტრაციის მიზანია, რომ არ არსებობდეს N რაოდენობის პირველკურსელი, რომელთა შორის არცერთი ორი არ იცნობს ერთმანეთს. ცნობილია, რომ ერთი წვეულების მოსაწყობად, რომელშიც მოწვეული იქნება m რაოდენობის პირველკურსელი, საჭიროა $(m^2 - m)$ ლარი. იპოვეთ თანხის ის მინიმალური რაოდენობა, რომლის დახარჯვითაც ადმინისტრაცია შეძლებს თავისი მიზნის განხორციელებას.

ამოხსნა

პასუხი: $N^3 + N + 2$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ წვეულება, რომელშიც მოწვეულია m რაოდენობის პირველკურსელი, რომელთაგან არცერთი ორი არ იცნობს ერთმანეთს, იწვევს $\frac{m(m-1)}{2}$ ახალ ნაცნობობას. ესე იგი, ერთი ახალი ნაცნობობის შექმნა ადმინისტრაციას უჯდება 2 ლარი, არ აქვს მნიშვნელობა m რაოდენობის წყვილწყვილად უცნობ პირველკურსელს მოუწყობს ერთ წვეულებას, თუ ყოველი ორი მათგანისთვის მოაწყობს $\frac{m(m-1)}{2}$ რაოდენობის „ორკაციან“ წვეულებას, შედეგი ერთი და იგივე იქნება და დახარჯული თანხაც არ შეიცვლება. ამ მსჯელობიდან გამომდინარე, მთავარი საკითხი შეგვიძლია დავსვათ შემდეგნაირად: მინიმუმ რამდენი ნაცნობობა უნდა შექმნას ადმინისტრაციამ, რომ აღარ მოიძებნებოდეს N რაოდენობის სტუდენტი, რომელთაგან არცერთი ორი არ იქნება ნაცნობი? თუ ამ კითხვაზე პასუხი იქნება x, მაშინ ამოცანის პასუხი იქნება $2x$, რადგან ერთი ნაცნობობის შექმნა ჯდება 2 ლარი.

ჯერ მოვიყვანოთ მაგალითი იმისა, თუ როგორ უნდა დახარჯოს ადმინისტრაციამ $N^3 + N + 2$ ლარი ისე, რომ მიაღწიოს სასურველ მიზანს. შევქმნათ პირველკურსელთა $N - 1$ ცალი ჯგუფი, რომელთაგან $N - 2$ ცალ ჯგუფში შედის $N + 1$ პირველკურსელი, ხოლო ერთ ჯგუფში შედის დანარჩენი $N + 2$ პირველკურსელი. მართლაც $(N-2)(N+1) + (N+2) = N^2$. ადმინისტრაციამ თითოეულ ჯგუფში ყოველი ორი პირველკურსელი ერთმანეთს უნდა გააცნოს. ამისათვის საჭირო იქნება დაიხარჯოს $(N-2)(N+1)N + (N+2)(N+1) = N^3 + N + 2$ რაოდენობის ლარი. რადგან სულ $N - 1$ ჯგუფია, ამიტომ ნებისმიერი N რაოდენობის პირველკურსელიდან, რომელიმე ორი მაინც მოხვდება ერთ ჯგუფში და ისინი იქნებიან ნაცნობები. ესე იგი ვერ მოვძებნით N რაოდენობის პირველკურსელს, რომელთაგან ყოველი

ორი უცნობი იქნება. ანუ მივიღეთ, რომ N^3+N+2 ლარის დახარჯვით ადმინისტრაცია აღწევს სასურველ მიზანს.

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ ადმინისტრაციამ რა გზითაც არ უნდა დახარჯოს N^3+N+2 ლარზე ნაკლები თანხა, ყველანაირ შემთხვევაში მოვძებნით N რაოდენობის პირველკურსელს, რომელთაგან ყოველი ორი იქნება უცნობი, ანუ ვერ მიაღწევს სასურველ მიზანს. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლ ე მ ა: ნებისმიერ G გრაფში მოიძებნება წვეროების დამოუკიდებელი სიმრავლე S, რომლისთვისაც

$$|S| \geq \sum_{v\in G} \frac{1}{d_v+1}$$

სადაც, $|S|$ აღნიშნავს S სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობას, d_v აღნიშნავს v წვეროს ხარისხს და წვეროების დამოუკიდებელი სიმრავლე ნიშნავს წვეროების სიმრავლეს, რომელშიც არცერთი ორი არ არის დაკავშირებული წიბოთი.

ლემა დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით G გრაფში წვეროების რაოდენობის მიმართ, ანუ $|G|\equiv n$-ის მიმართ. როცა $n=1$ დებულება ტრივიალურია. დავუშვათ რაიმე ნატურალური k რიცხვისთვის, თუ $n\leq k$, მაშინ ლემა ჭეშმარიტია. ახლა ვთქვათ G გრაფში ელემენტთა რაოდენობა არის $k+1$, ანუ $|G|\equiv k+1$. გრაფში შევარჩიოთ მინიმალური ხარისხის მქონე v_0 წვერო. (თუ ასეთი რამდენიმეა, შევარჩიოთ ერთერთი ნებისმიერად). ვთქვათ, v_0-ის ხარისხი არის d და მისი მეზობლები არიან $v_1, v_2, \dots, v_d$ წვეროები. G გრაფიდან ამოვშალოთ წვეროები $v_0, v_1, v_2, \dots, v_d$ და, ასევე ყველა ის წიბო რომლებიც ამ წვეროებს უკავშირდებოდნენ. მივიღებთ G' გრაფს, რომელშიც მაქსიმუმ k წვერო იქნება. გამოვიყენოთ ინდუქციური დაშვება G' გრაფისთვის. G' გრაფში იარსებებს წვეროების დამოუკიდებელი ქვესიმრავლე S', რომლისთვისაც

$$|S'| \geq \sum_{v\in G'} \frac{1}{d_v+1}$$

ვაჩვენოთ, რომ G გრაფისთვის S-ის როლში გამოგვადგება $S=S'\cup\{v_0\}$. ცხადია, რომ სიმრავლე $S'\cup\{v_0\}$ დამოუკიდებელი იქნება, რადგან v_0 წვეროს მეზობელი წვერო G' გრაფში არ დავტოვეთ. ასევე,

$$|S| = 1+|S'| \geq 1+\sum_{v\in G'}\frac{1}{d_v+1} = (d+1)\frac{1}{d+1}+\sum_{v\in G'}\frac{1}{d_v+1} \geq \sum_{i=0}^{d}\frac{1}{d_{v_i}+1}+\sum_{v\in G'}\frac{1}{d_v+1} = \sum_{v\in G}\frac{1}{d_v+1}$$

მივიღეთ, რომ $|G|\equiv k+1$ შემთხვევისთვისაც სამართლიანია და, შესაბამისად, დამტკიცებულია ლემა.

ახლა დავუბრუნდეთ ამოცანას და დავუშვათ, რომ ადმინისტრაციამ უკვე მოაწყო რამდენიმე წვეულება და დახარჯა x რაოდენობის ლარი, რომელიც ნაკლებია (N^3+N+2)-ზე. განვიხილოთ G გრაფი, რომლის წვეროებად აღქმულია პირველკურსელები, ხოლო წიბოებად აღქმულია ნაცნობობა. ცხადია, რომ ყველა წვეროს ხარისხების ჯამი ტოლი იქნება x-ის, რადგან ზოგადად გრაფში წვეროების ხარისხების ჯამი ორჯერ მეტია წიბოების რაოდენობაზე. ესე იგი $\sum_{v\in G} d_v < N^3+N+2$. რადგან

დახარჯული თანხა და, ასევე, ყველა წვეროს ხარისხების ჯამი ლუწი რიცხვია, ამიტომ $\sum_{v\in G} d_v \leq N^3 + N$. ქვემოდან შევაფასოთ გამოსახულების $\sum_{v\in G} \frac{1}{d_v+1}$ მნიშვნელობა. გამოვიყენოთ ცნობილი უტოლობა, რომელიც წარმოადგენს კოში-შვარცის უტოლობის კერძო შემთხვევის - ტიტუს ლემის კერძო შემთხვევას: $\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1+\cdots+x_n}\right)$ https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Titu%27s_Lemma (ან უბრალოდ გამომდინარეობს ფაქტიდან, რომ დადებითი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული არანაკლებია ამავე რიცხვების საშუალო ჰარმონიულზე).

$$\sum_{v\in G} \frac{1}{d_v + 1} \geq \frac{N^4}{\sum_{v\in G}(d_v + 1)} = \frac{N^4}{\sum_{v\in G} d_v + N^2} \geq \frac{N^4}{N^3 + N + N^2} = \frac{N^3}{N^2 + N + 1} > \frac{N^3 - 1}{N^2 + N + 1} = N - 1$$

ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად G გრაფში მოიძებნება წვეროების დამოუკიდებელი სიმრავლე S, რომლისთვისაც $|S| > N - 1$, ანუ $|S| \geq N$. გამოვიდა, რომ მოიძებნება N პირველკურსელი, რომელთაგან არცერთი ორი არ იცნობს ერთმანეთს. ანუ ადმინისტრაციამ $(N^3 + N + 2)$-ზე ნაკლები თანხით ვერ მიაღწია სასურევლ მიზანს. ესე იგი მინიმალური თანხა, რომლითაც მიაღწევს მიზანს არის $N^3 + N + 2$.