

ა(ა)იპ საქართველოს აგრარული უნივერსიტეტი
შპს თბილისის თავისუფალი უნივერსიტეტი

ფიზიკის სამეცნიერო მიმართულების კომისიის
რეკომენდაცია

დისერტანტი: ნათელა ჩაჩავა

დისერტაციის სათაური: „კლასიკური ელექტროდინამიკის ზოგიერთი პარადოქსი და მათი გადაჭრის შესაძლებლობები“

დისერტაციის დაცვის თარიღი: 25 იანვარი 2020 წ.

რეცენზენტი 1: გრიგორი გიორგაძე

რეცენზენტი 2: ანდრია როგავა

სადისერტაციო კომისიის თავმჯდომარე: ვაჟა ბერეჟიანი

სადისერტაციო კომისიის წევრი: ზაზა ოსმანოვი

სადისერტაციო კომისიის წევრი: ნანა შათაშვილი

სადისერტაციო კომისიის წევრი: ფაიკ ბოგდანოვი

რეკომენდებულია დაცვისათვის ფიზიკის სამეცნიერო მიმართულების კომისიის მიერ.

თავმჯდომარე /ზაზა ოსმანოვი/: _____
(ხელმოწერა)

წევრი /ვაჟა ბერეჟიანი/: _____
(ხელმოწერა)

წევრი /ზაზა მეტრეველი/: _____
(ხელმოწერა)

სადოქტორო სკოლის კოორდინატორი: _____ / ნატო კობახიძე/
(ხელმოწერა)

თარიღი: 18 დეკემბერი 2019.

დეკლარაცია

როგორც წარმოდგენილი სადოქტორო დისერტაციის – „კლასიკური ელექტრო-დინამიკის ზოგიერთი პარადოქსი და მათი გადაჭრის შესაძლებლობები“ ავტორი, ვაცხადებ, რომ ჩემი დისერტაცია წარმოადგენს ორიგინალურ ნაშრომს და მასში სხვა ავტორების აქამდე გამოქვეყნებული, გამოსაქვეყნებლად მიღებული ან დასაცავად წარდგენილი მასალები გამოყენებულია ციტირების სათანადო წესების დაცვით.

სახელი, გვარი ნათელა ჩაჩავა

(ხელმოწერა)

თარიღი:

აბსტრაქტი

თეორიულ ფიზიკაში პარადოქსები ხშირად ჩნდება არარეალური მოდელური ობიექტების განხილვის გამო (მაგ., ეთერი, ელექტრონის ორბიტები ატომში და ა. შ.). ცნობილია, რომ კლასიკური ელექტროდინამიკა განიხილავს დამუხტულ ნაწილაკებს (წერტილოვან მუხტებს) მაგნიტური მომენტის გარეშე, თუმცა დღეისთვის ცნობილ ფუნდამენტურ ნაწილაკებს (სტანდარტული მოდელის თანახმად, ესენია ლეპტონები, კვარკები, ურთიერთქმედების გადამტანი საშუალებო ბოზონები), რომელთაც აქვს მუხტი, გააჩნია მაგნიტური მომენტიც. დისერტაციაში განვიხილეთ სწორედ ასეთი ობიექტი – მაგნიტური მომენტის მქონე წერტილოვანი მუხტი; ავაგეთ შესაბამისი ელექტრო-მაგნიტური ველი; ვიპოვეთ შესაბამისი 4-დენის სიმკვრივე და ვაჩვენეთ, რომ მაგნიტური მუხტი ნულის ტოლია; ვიპოვეთ გამოსხივებული ველების რადიაციული ნაწილი და გამოვითვალეთ შესაბამისი უკუცემა; მივიღეთ გამოსხივების რეაქციის ძალა უზოგადესი სახით; ვაჩვენეთ, რომ მაგნიტური მომენტის გათვალისწინება არ სძლავს კლასიკური ელექტროდინამიკის პარადოქსებს, კერძოდ, გამოსხივების რეაქციის უზოგადესი ძალისთვის რჩება „ჰიპერბოლური მოძრაობის“ პარადოქსი.

ნაპოვნია და ცხადი სახით აღწერილია არათანაბარი მოძრაობის რეჟიმი, როდესაც გამოსხივების რეაქციის ძალა ნულია. ნაჩვენებია, რომ ეს რეჟიმი ერთადერთია; ნაპოვნია ამ რეჟიმის შესაბამისი ტრაექტორია (ჰიპერბოლა) ზოგად შემთხვევაში და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი; ნაჩვენებია, რომ არსებობს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, სადაც ეს ტრაექტორია ხდება წრფივი; ნაპოვნია გარეშე ელექტრო-მაგნიტური ველის უზოგადესი სახე, რომელიც უზრუნველყოფს მუხტის მოძრაობას ამ რეჟიმში; ნაჩვენებია, რომ ერთგვაროვან ელექტროსტატიკურ ველში მუხტის მოძრაობისას ზოგად შემთხვევაში გამოსხივების რეაქციის ძალა არ ნულდება; შემოთავაზებულია ამ ამოცანის იტერაციული ალგორითმით ამოხსნისთვის მოსახერხებელი (ბუნებრივი) სიმცირის პარამეტრი;

მიღებულია რამდენიმე ორიგინალური მათემატიკური შედეგი:

გაფართოებულია შვარცის თეორემა დამოუკიდებელი ცვლადებით შერეული კერძო წარმოებულების გადასმადობის შესახებ იზოლირებული სინგულარობების მქონე ფუნქციისთვის (სინგულარული განზოგადებული ფუნქციების სიმრავლეში);

შედგენილია რეკურენტული თანაფარდობები, რომელებიც გამოსახავს პოლინომის განსხვავებული ფესვების რაოდენობას, მინიმალურ მანძილს განსხვავებულ ფესვთა შორის, მინიმალური და მაქსიმალური ფესვების მნიშვნელობებს (სპექტრის სიგანეს) პოლინომის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქციებით. ნაჩვენებია, რომ რეკურენტულად აგებული მიმდევრობები ექსპონენციალურად სწრაფად იკრიბება.

ნაჩვენებია, რომ არნოლდის თეორემა გადაგვარებული ელიფსოიდების სივრცის კოგანზომილების შესახებ მცდარია. მოყვანილია კონტრმაგალითი და დამტკიცებულია შესწორებული თეორემა. ნაჩვენებია, რომ ჩვენი თეორემიდან გამომდინარე შედეგი ემთხვევა არნოლდის მიერ მიღებულ შედეგს და გარკვეულია ამ თანხვედრის მიზეზი.

შედეგები მიღებულია კომპიუტერული სიმბოლური გამოთვლების საშუალებით, ჩვენი მიზნისთვის ადაპტირებული კომპიუტერული ალგებრის მეთოდების გამოყენებით.

საძიებო სიტყვები: 1. წერტილოვანი ნაწილაკის მაგნიტური მომენტი; 2. ჰიპერბოლური მოძრაობა; 3. პოლინომის ფესვები.

Abstract

A number of paradoxes in theoretical physics arise due to unrealistic model of objects (e.g., ether, electron orbits in an atom, etc.). The classical electrodynamics deals with point charged particles having no magnetic moment, while the fundamental particles known up today (leptons, quarks, intermediate bosons) that have charge, have magnetic moment as well. In the dissertation we have studied just such an object – a point charge with a magnetic moment; we have built up a corresponding electromagnetic field, calculated the 4-current density and have shown that the corresponding magnetic charge is zero; using the radiated part of the field obtained we calculate the corresponding radiation reaction (RR) force and present it in the most general form; we have found out that taking into consideration the magnetic moment one can not avoid the paradoxes of classical electrodynamics, namely, the paradox of "hyperbolic motion" even if the most general form of RR force is used.

An accelerated motion regime that corresponds to zero RR force is found out and explicitly described. The uniqueness of this mode is shown; the correspondent trajectory (generally, hyperbola) as well as a law of motion along that trajectory is found out. It is shown that there exist inertial reference systems such that the trajectory with respect to them is rectilinear and the motion is the initial speedless; we have found the most general electromagnetic field that supports such (having zero RR force) motion; It is shown that the only case of such motion in a uniform electrostatic field corresponds to rectilinear motion along the field with an initial acceleration caused by the field; a convenient (small) expansion parameter is proposed for constructing an approximate general solution by the iterations for the motion in a uniform electrostatic field when RR force is to be taken into account.

Some original mathematical results are obtained:

The Schwartz's theorem on permutation of derivatives with respect to independent variables was extended for the functions having isolated singularities: we have shown that the commutator of these derivatives is zero (in weak sense).

Recursive ratios are drawn that give the number of different roots of the polynomial (having real roots only), the minimum distance between the different roots, the minimum and the maximum roots values (spectrum width), expressed as the rational functions of the polynomial coefficients. The recursively constructed sequences converge rapidly (exponentially).

It is shown that the Arnold's theorem on the co-dimension of degenerate ellipsoids space is false. There is given a counterexample and the corresponding (corrected) theorem is proved. It is shown that the corollary of our theorem coincides with the one obtained by Arnold and the reason for this coincidence is shown.

The results are obtained using computer programs (such as "Mathematica") for symbolic computation that we have adapted to our purposes.

Key words: 1. magnetic moment of a point particle; 2. hyperbolic motion; 3. Roots of polynomial.

მადლობა მინდა გადავუხადო

თემის ხელმძღვანელს პროფესორ ილია ლომიძეს თემის შერჩევისთვის, მაღალ-კვალიფიციური კონსულტაციებისთვის, უდიდესი ამაგისთვის, ზრუნვის და თანადგომისთვის;

რეცენზენტებს – პროფესორ გრიგორ გიორგაძეს და პროფესორ ანდრია როგავას ღრმა და სასარგებლო შენიშვნებისთვის;

კომისიის წევრებს იმ დროისთვის, რომელიც მათ გულუხვად დამითმეს;

და თავისუფალი უნივერსიტეტის ფიზიკის სკოლის თანამშრომლებს – პროფესორ ვაჟა ბერეჟიანს, პროფესორ გიორგი ჯორჯაძეს და პროფესორ ზაზა ოსმანოვს ჩემთვის დათმობილი დროისთვის, მეგობრული დამოკიდებულების და მრავალი სასარგებლო რჩევისთვის;

სადისერტაციო თემასთან დაკავშირებული ჩემი შრომების თანაავტორებს – პროფესორ დავით ქარქაშაძეს და აწ გარდაცვლილ პროფესორ ჯიმშერ ჯავახიშვილს, სასარგებლო იდეებისთვის, თანამშრომლობისთვის, თანადგომისა და ნაყოფიერი დისკუსიებისთვის;

თავისუფალი უნივერსიტეტის ადმინისტრაციას და, უპირველესად, სადოქტორო სკოლის კოორდინატორს პროფესორ ნატო კობახიძეს ყურადღების, მოთმინებისა და სასარგებლო რჩევებისთვის;

ჩემ ახლობლებს და ყველა გულშემატკივარს.

სარჩევი

აბსტრაქტი	5
მადლობები	7
პუბლიკაციების ჩამონათვალი	10
კონფერენციებში მონაწილეობა	11
აღნიშვნები და შემოკლებები	12
შესავალი	13
წარმოდგენილი კვლევის მიზანი	17
კვლევის მეთოდი	17
თავი 1. კლასიკური ელექტროდინამიკის ზოგიერთი პრობლემა	18
1.1 თვითაჩქარება. წინმსწრები მოქმედება	18
1.2. ელექტრომაგნიტური მასა. $4/3$ პრობლემა	21
1.3. ჰიპერბოლური მოძრაობის პრობლემა	23
1.4. ენერგია-იმპულსის გადატანა გამოსხივებისას	24
1.5. მაქსველის განტოლებების ჰამილტონური ფორმა	30
თავი 2. დამუხტული ნაწილაკი საკუთარი მაგნიტური მომენტით	33
2.1. ელექტრული მუხტის ელექტრომაგნიტური ველის რადიაციული ნაწილი და შესაბამისი რეაქციის ძალა	33
2.2. მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ველის 4-პოტენციალი	36
2.3. მაგნიტური 4-დენის სიმკვრივე	39
2.4. მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის რადიაციული ნაწილი და შესაბამისი რეაქციის ძალა	41
2.5. მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის რადიაციული ნაწილი და შესაბამისი რეაქციის ძალა	46
2.6. გამოსხივების რეაქციის ძალა წრფივი და წრიული მოძრაობის შემთხვევაში	48
თავი 2-ის ძირითადი შედეგები	51
თავი 3. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის რეჟიმი, რომელსაც შეესაბამება გამოსხივების რეაქციის ნულოვანი ძალა	52
3.1. მოძრაობის კანონი	53
3.2. ტრაექტორია	58
3.3. გარეშე ელექტრომაგნიტური ველები, რომლებიც უზრუნველყოფს ჰიპერბოლურ მოძრაობას	67
3.4. მოძრაობა მხოლოდ ელექტროსტატიკურ ერთგვაროვან ველში	73

თავი 3-ის ძირითადი შედეგები.....	76
თავი 4. მათემატიკური შედეგები	77
4.1. შვარცის თეორემის განზოგადება	77
4.2. განტოლების განსხვავებულ ფესვთა შორის მინიმალური მანძილის სიმბოლური შეფასების მეთოდი	81
თავი 4-ის დასკვნები	90
დასკვნები და შემდგომო კვლევის პერსპექტივა	91
ლიტერატურა	94
დამატებები	
A. აჩქარებისა და მისი წარმოებულის 4-ვექტორები.....	98
B. მაგნიტური მომენტის ტენზორის წარმოებულები	98
C. მაგნიტური მომენტის ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალის ი. ფრენკელისეული გამოყვანა	100
D. ჰიპერბოლური მოძრაობის კინემატიკა მაგნიტური მომენტის მქონე მუხტისთვის.....	104
E. RR ძალის უზოგადესი სახე ლაბორატორიულ სისტემაში და PF-ში	105
F. RR ძალა, რომელიც მოქმედებს წრეწირზე თანაბრად მოძრავ ნაწილაკზე	111
G. პოტენციალის მიღება გრინის ფუნქციის გამოყენებით მაგნიტური მომენტის შესაბამისი 4-დენის სიმკვრივიდან	112
H. თეორემა გადაგვარებული ელიფსოიდების ქვესივრცის კო-განზომილების შესახებ ზოგადი ელიფსოიდების სივრცეში (ვ. არნოლდის თეორემის დაზუსტება)	115

პუბლიკაციები დისერტაციის თემაზე

1. Chachava N., Lomidze I., Javakhishvili J., Karkashadze D., About One Contradiction in Classical Electrodynamics (Velocity-Dependence of Electromagnetic Field Energy of Charge Moving with Constant Velocity), თსუ შრომები 357, ფიზიკა 39, თბილისი, 2004, გვ. 115–130.
2. Chachava N., Lomidze I., Javakhishvili J., Karkashadze D., About One Contradiction in Classical Electrodynamics (Velocity-Dependence of Electromagnetic Field Energy of Charge Moving with Constant Velocity), Сообщения ОИЯИ E2-2005-180, Дубна, 2005, с. 1–11.
3. ნ. ჩაჩავა, ი. ლომიძე, რელატივისტურად მბრუნავი რგოლის დინამიკა. ივ. ჯავახიშვილის თსუ 90-ე წლისთავისადმი მიძღვნილი სამეცნიერო კონფერენცია ფიზიკაში, მოხსენებათა თეზისები, 25–26 სექტ., 2008, თბილისი. <http://www.phys08.tsu.ge>, გვ. 17.
4. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Matrices with Their Polynomial Invariants. GMU III International Conference. Batumi, Georgia, Sept. 2–9, 2012, Book of Abstracts, p. 67.
5. I. Lomidze, N. Chachava, C. Teitelboim's Splitting of the Maxwell Tensor of a Charged Particle, IV Int. Conf. of Georgian Math. Union, Sept. 9–16, 2013, Book of Abstracts, p.101.
6. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Operator's Characteristic Polynomials with their Polynomial Invariants, International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 2015, July 6–10, 2015, Tbilisi, Book of Abstracts, p. 99.
7. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Operator's Orbits Respect to Unitary Transformations Group. Int. Workshop on Operator Theory and Operator Algebras WOAT 2016, July 5–8, 2016, Lisbon, Book of Abstracts, p. 35.
8. I. Lomidze, N. Chachava, Symbolic estimation of distances between eigenvalues of Hermitian operator, Cornell University Library, [arXiv:1608.04989 math.CA](https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1608/1608.04989.pdf), Submitted 13 Aug., 2016; originally announced August 2016. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1608/1608.04989.pdf>.
9. Lomidze I., Chachava N. Elaboration of the Arnold theorem on Ellipsoids' Space Co-dimension. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math., vol. 30, 2016, Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 63–65.
10. Lomidze I., Chachava N., Symbolic Estimation of Distances between Eigenvalues of a Hermitian Operator. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math., vol. 30, 2016, Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 66–69.
11. I. Lomidze, N. Chachava, Symbolic expression for location region of real (imaginary) parts of an one-variable polynomial's roots and estimation of the minimal distance between them. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math., vol. 31, 2017, Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 91–94.
12. I. Lomidze, N. Chachava, S. Yevlakhov, Symbolic expression for location region of an one-variable polynomial's roots and estimation of the minimal distance between them. Caucasian Mathematics Conference CMC II, Van, Turkey, August 22–24, 2017, Book of Abstracts, p.101.
13. I. Lomidze, N. Chachava, Symbolic estimation of distances between eigenvalues of Hermitian operator and unitary orbits classification, Cornell University Library, [arXiv:1708.00761 math.RA](https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1708/1708.00761.pdf), Submitted 29 Jul., 2017; originally announced August 2017. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1708/1708.00761.pdf>
14. I. Lomidze, N. Chachava, The Electromagnetic Field and Radiation Reaction Force for Point Charged Particle with Magnetic Moment. Proceedings of XXIII-rd Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED 2018), Sept. 24–27, 2018, Tbilisi, Georgia. Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 89–94. <http://ewh.ieee.org/r8/ukraine/georgian/DIPED>.
15. N. Chachava, I. Lomidze, The Electromagnetic Field and Radiation Reaction Force for Point Charged Particle with Magnetic Moment, Georgian Electronic Scientific Journal: Physics, 2019, N 1 (21), p. 60–73, GTU publ., Tbilisi. <http://gesj.internet-academy.org/ge/>

კონფერენციებში მონაწილეობა

1. ნ. ჩაჩავა, ი. ლომიძე, რელატივისტურად მბრუნავი რგოლის დინამიკა. ივ. ჯავახიშვილის თსუ 90-ე წლისთავისადმი მიძღვნილი სამეცნიერო კონფერენცია ფიზიკაში, 25-26 სექტ., 2008, თბილისი. <http://www.phys08.tsu.ge>, გვ. 17.
2. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Matrices with Their Polynomial Invariants. GMU III International Conference. Batumi, Georgia, Sept. 2–9, 2012.
3. I. Lomidze, N. Chachava, C. Teitelboim's Splitting of the Maxwell Tensor of a Charged Particle, IV Int. Conf. of Georgian Math. Union, Batumi, Sept. 9–16, 2013.
4. I. Lomidze, N. Chachava, Polynomial roots' separation and the algorithmic method of polynomials classification. The XXIX Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Appl. Math. of Ivane Javakhisvili Tbilisi State University April 22–24, 2015, Tbilisi. [http://www.viam.science.tsu.ge/others/GS-2015\(eng\).pdf](http://www.viam.science.tsu.ge/others/GS-2015(eng).pdf).
5. I. R. Lomidze, N. D. Chachava, Classification of Hermitian Matrices with Their Polynomial Invariants. The 18-th Workshop on Computer Algebra, May 26–27, 2015, LIT JINR, Dubna, Russia. http://compalg.jinr.ru/Dubna2015/abstracts2015_files/Lomidze_Chachava.pdf
6. I. Lomidze, N. Chachava, N. Shubitidze, S. A. Evlakhov, A New Method of Factorization of Hermitian Operator's Characteristic Polynomial. The 18-th Workshop on Computer Algebra, May 26–27, 2015, LIT JINR, Dubna, Russia. http://compalg.jinr.ru/Dubna2015/abstracts2015_files/evlakhov_abstract.pdf.
7. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Operator's Characteristic Polynomials with their Polynomial Invariants, International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 2015, July 6–10, 2015, Tbilisi.
8. N. Chachava, I. Lomidze. Elaboration of the Arnold theorem on ellipsoids' space co-dimension, The XXX Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Math. of Iv. Javakhisvili Tbilisi State University, Section of Complex Analysis and Applications, April 20–22, 2016, Tbilisi. <http://www.viam.science.tsu.ge/old/others/2016/program.pdf>
9. I. Lomidze, N. Chachava, On the minimal distance between two roots of a polynomial, The XXX Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math. of Iv. Javakhisvili Tbilisi State University, Section of Number Theory, Algebra and Geometry, April 20–22, 2016, Tbilisi. <http://www.viam.science.tsu.ge/old/others/2016/program.pdf>.
10. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Matrices' orbits. The 19-th Workshop on Computer Algebra, May 24–25, 2016, LIT JINR, Dubna, Russia. http://compalg.jinr.ru/Dubna2016/abstracts2016_files/1250%2016%20Lomidze.pdf
11. I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Operator's Orbits Respect to Unitary Transformations Group. Int. Workshop on Operator Theory and Operator Algebras WOAT 2016, July 5–8, 2016, Lisbon.
12. Lomidze I., Chachava N., Symbolic Estimation of Distances Between Eigenvalues of Hermitian Operator. South Caucasus Computing and Technology Workshop SCCTW 2016, Oct. 3–7, 2016, Tbilisi.
13. I. Lomidze, N. Chachava, S. Yevlakhov, Symbolic expression for location region of an one-variable polynomial's roots and estimation of the minimal distance between them. Caucasian Mathematics Conference CMC II, Van, Turkey, August 22–24, 2017.
14. I. Lomidze, N. Chachava, The Electromagnetic Field and Radiation Reaction Force for Point Charged Particle with Magnetic Moment. Proceedings of XXIII-rd Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED 2018), Sept. 24–27, 2018, Tbilisi, Georgia. <http://ewh.ieee.org/r8/ukraine/georgian/DIPED>

აღნიშვნები, შემოკლებები და აბრევიატურები

არჩეულია ერთეულთა სისტემა, სადაც სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში $c = 1$.

განმეორებული ლათინური ინდექსებით იგულისხმება აჯამვა 0-დან 3-მდე, ბერძნულით – 1-დან 3-მდე.

მეტრიკული ტენზორი არჩეულია შემდეგი სახით: $g_{ik} = g^{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

$\delta^{\alpha\beta} = \delta^\beta_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ კრონეკერის სიმბოლოა, ამასთან $\delta_i^k = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$.

3-ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღნიშნება $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

4-ვექტორების სკალარული ნამრავლი – $\langle ab \rangle$ ან $a_k b^k$, $g_{ik} a^i b^k = g^{ik} a_i b_k$;

$\text{Tr}(A)$ აღნიშნავს A მატრიცის კვალს (შპურს): $\text{Tr}(A) = A_k^k = g^{ik} A_{ik}$;

$(AB...Cu...w)^k$, $(AB...Cu...w)_k$ აღნიშნავს, შესაბამისად, იმ ვექტორის კონტრა- ან კო-ვარიანტულ მდგენელს, რომელიც მიიღება $AB...C$ მატრიცებისა (ოპერატორების) და $u...w$ ვექტორების გადამრავლებით;

$\vec{E}$ და $\vec{H}$ აღნიშნულია ელექტრული და მაგნიტური ველების დამაბულობები ვაკუუმში;

W – ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია;

RR (Radiation Reaction) ძალა – გამოსხივების რეაქციის ძალა;

LAD (Lorentz-Abraham-Dirac) ძალა – ლორენც-აბრაჰამ-დირაკის ძალა;

PF (Proper Frame) – ნაწილაკის მყისიერად თანამდევი ინერციული ათვლის სისტემა;

დანარჩენი აღნიშვნები განიმარტება ტექსტში მათი შემოღებისთანავე.

შესავალი

თანამედროვე ველის კვანტური თეორია, კერძოდ, კვანტური ელექტროდინამიკა, იხილავს ნაწილაკებს და ველებს საწყის და საბოლოო მდგომარეობაში – ურთიერთქმედებამდე და ურთიერთქმედების შემდეგ, რაც საშუალებას გვაძლევს დავითვალოთ ამა თუ იმ პროცესის ალბათობა, მაგრამ არა მათი ურთიერთქმედების დეტალები უშუალოდ. კლასიკური მიდგომა საინტერესოა ნაწილაკების ნაკადის მოძრაობის შესწავლისას, ვთქვათ, ამაჩქარებელში ან ელექტრონულ მიკროსკოპში, ან პლაზმაში მიმდინარე პროცესების განხილვისას; გარდა ამისა, კლასიკური თეორია საინტერესოა, როგორც კვანტური თეორიის ზღვარი.

კლასიკური ელექტროდინამიკის არსებობის საუკუნენახევრიანი ისტორიის მიუხედავად, თეორიაში რჩება გადაუჭრელი პრობლემები. ამასთან, ზოგიერთი ეს პრობლემა უშუალოდ უკავშირდება თეორიის შემდგომ განვითარებასაც და მის გამოყენებებსაც საინჟინრო პრაქტიკაში თუ სხვა მეცნიერებებში.

მაქსველის მაკროსკოპული ელექტროდინამიკა იხილავს მუხტის განაწილებას მოცულობაში, ზედაპირზე ან წირზე; შესაბამისად, მუხტის განაწილების მოცულობითი, ზედაპირული ან წირითი სიმკვრივე სასრული (შემოსაზღვრული) ფუნქციაა; მაქსველის ელექტროდინამიკისთვის უცხოა მუხტების განხილვა, როგორც ელემენტარული ნაწილაკების ერთობლიობისა (იგივე ითქმის დენის სიმკვრივეზეც). როგორ დავუკავშიროთ მაკროსკოპული ელექტროდინამიკა ელემენტარული ნაწილაკების არსებობის ფაქტს?

3. ა. ლორენცმა პირველმა სცადა ელექტროდინამიკასა და ოპტიკაში ცნობილი ყველა მოვლენა დაეყვანა ელექტრონებისა და იონების ურთიერთქმედებაზე. გარდა ამისა, ის იხილავდა ამ ნაწილაკების არა უშუალო ურთიერთქმედებას, როგორც მისი წინამორბედები, არამედ მათ ურთიერთქმედებას ველის მეშვეობით [1]. ლორენცი უფრო შორს წავიდა: მან სცადა ელექტრონის მასა მთლიანად დაეკავშირებინა მის ელექტრომაგნიტურ ენერგიასთან. ამ კონტექსტში საინტერესო გახდა ელექტრონის სტრუქტურის განხილვა. ცნობილია, რომ ამ მიდგომას მრავალი სირთულე ახლავს და საკითხი არ კარგავს აქტუალობას კვანტური თეორიის ფარგლებშიც.

წერტილოვანი ელექტრონის განხილვის შემთხვევაში თავს იჩენს სიძნელეები, რომლებიც დაკავშირებულია, კერძოდ, წერტილოვან მუხტზე მოქმედ გამოსხივების რეაქციის ძალასთან. ცნობილი პრობლემებია: თვითაჩქარების პარადოქსი – მუხტზე

გარეშე ძალების მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ, გარკვეული საწყისი პირობის შემთხვევაში იგი ჩქარდება სინათლის სიჩქარემდე; ე.წ. ჰიპერბოლური მოძრაობის პრობლემა – აჩქარებულად მოძრავი ელექტრონი ასხივებს ელექტრომაგნიტურ ველს, მაგრამ მუხტი არ განიცდის ”უკუცემას”, ანუ მასზე არ მოქმედებს გამოსხივების რეაქციის ძალა; და ბოლოს, ნაწილაკის აჩქარების დროით წარმოებულზე ამ ძალის დამოკიდებულების საკითხი – კლასიკური მექანიკის საზღვრებში მსგავსი (აჩქარების წარმოებულზე, ანუ კოორდინატის მესამე წარმოებულზე დამოკიდებული) ძალები საერთოდ არ განიხილება; მექანიკაში საწყისი მდგომარეობა განისაზღვრება ორი საწყისი პირობით: საწყისი კოორდინატით და საწყისი სიჩქარით. გამოსხივების რეაქციის ძალის შემთხვევაში კი მოძრაობის განტოლების – III რიგის დიფერენციალური განტოლების – ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად ორი საწყისი პირობა საკმარისი არ არის. ამდენად, ამ შემთხვევაში ირღვევა მექანიკის (და საერთოდ კლასიკური ფიზიკის) ძირითადი პარადიგმა – **მიზეზობრიობის პრინციპი** (კლასიკური გაგებით): *საბოლოო მდგომარეობა (ანუ მოძრაობა) მთლიანად განისაზღვრება საწყისი მდგომარეობით* – საწყისი მდებარეობითა და საწყისი სიჩქარით. მიზეზობრიობის პრინციპის „გადასარჩენად“ აუცილებელი ხდება ან მდგომარეობის (საწყისი და საბოლოო) აღწერის შეცვლა, ან პარადიგმის შეცვლა. ორივე შემთხვევაში საქმე გვაქვს კლასიკური ფიზიკის მიდგომის ძირეულ შეცვლასთან. მაგალითად, კვანტურ მექანიკაში მდგომარეობის აღწერა ხდება არა კოორდინატისა და სიჩქარის ზუსტი და დამოუკიდებელი მნიშვნელობებით, არამედ ტალღური ფუნქციით, ხოლო მიზეზობრიობის (კვანტური) პრინციპის შესაბამისად საბოლოო მდგომარეობის შესაბამისი ტალღური ფუნქცია განისაზღვრება საწყისი მდგომარეობის ტალღური ფუნქციით.

კლასიკური ელექტროდინამიკის ხსენებული სირთულეების ნაწილს ხსნის ფ. რორლიხის [2] ახლებური განხილვა როგორც ელექტრონის სტრუქტურის, ასევე ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის 4-ვექტორისა. ამ მიდგომის უშუალო გაგრძელებას წარმოადგენს კ. ტეიტელბოიმის [3] მიერ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის დაყოფა მუხტთან დაკავშირებულ და რადიაციულ ნაწილებად, რამაც საშუალება მისცა მას შეეცვალა გამოსხივების რეაქციის ძალის სახე და მოეხსნა მთელი რიგი პარადოქსები. შევნიშნოთ, რომ ეს მიდგომა, გარკვეული სახეცვლილებით, გამოსადეგი აღმოჩნდა [4] არააბელური ყალიბრული ველების აღსაწერადაც.

წერტილოვანი მუხტის არსებობასთან და (გარე და საკუთარ) ელექტრომაგნიტურ ველთან მისი ურთიერთქმედების პრობლემების თანმიმდევრული განხილვა სცადეს ლორენცმა [1], პ. დირაკმა [5], რ. ფეინმანმა [6] და სხვებმა. ამ შრომების შედეგად პრობლემები უფრო გამოკვეთილად ჩამოყალიბდა, მაგრამ არ გადაიჭრა. კლასიკური ელექტროდინამიკის თანამედროვე სტატუსი (გადაუჭრელი პრობლემების ჩათვლით) საკმაო სისრულით შეიძლება ამოვიკითხოთ ლ. ლანდაუსა და ე. ლივშიცის ენციკლოპედიურ სახელმძღვანელოში [7].

ჩამოთვლილი და სხვა პრობლემების განხილვა, ფიზიკის სხვა პრობლემებთან მათი კავშირების დადგენა და გადაჭრის გზების ძებნა გრძელდება. კლასიკურ ელექტროდინამიკაში გადანორმვის შესრულება (უსასრულო „საკუთარი ენერგიის“ თანმიმდევრული გათვალისწინება) სცადა ზ. კაკუშაძემ [8]. გ. სმიტმა და სხვ. [9a,b] განიხილეს ენერგია – იმპულსის გადატანა ელექტრომაგნიტურ ველში არასტაციონარული ინტერფერენციის გათვალისწინებით. იგივე პრობლემა რამდენადმე უფრო ადრე და უფრო თანმიმდევრულად განიხილეს ი. ლომიძემ, დ. ქარქაშაძემ და ჯ. ჯავახიშვილმა შრომებში [10] – [12]. მიღებული შედეგები არ იძლევა დასმულ პრობლემებზე საბოლოო პასუხს და უფრო ამოცანის დასმის კუთხით შეიძლება შეფასდეს.

დასმული პრობლემების გადაჭრის საკმაოდ რადიკალური გზა დასახულია ე. მაიორანას შრომებში [13] (იხ., აგრეთვე, [14]; ამავე მიდგომის განვითარება მოცემულია შრომაში [12]): მაქსველის განტოლებების სისტემა კლასიკური ელექტრომაგნიტური ველისთვის შეიძლება ჩაიწეროს ე. წ. ჰამილტონის ფორმით, როგორც დირაკის განტოლება რელატივისტური უმასო ვექტორული კვანტური ნაწილაკისთვის. ამასთან, დირაკის განტოლებაში შემავალი პლანკის მუდმივა $\hbar$ (რომელიც დამახასიათებელია ყველა კვანტური განტოლებისთვის) „ინილბება“ – მრავლდება კოეფიციენტზე, რომელიც პროპორციულია ნაწილაკის მასისა. ელექტრომაგნიტური ველის კვანტის – ფოტონის მასა ნულის ტოლია და, შესაბამისად, პლანკის მუდმივის შემცველი წევრი მაქსველის განტოლებაში არ ჩნდება. შევნიშნოთ, რომ ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს ელექტრომაგნიტურ ველთან დაკავშირებული კიდევ ერთი მოვლენის – წონასწორული გამოსხივების შესწავლისას: რელეი-ჯინსის ცნობილი ფორმულა (იხ., მაგ., [6]), რომელიც პლანკის კვანტური (ზუსტი) ფორმულის კლასიკურ ზღვარს წარმოადგენს და არ შეიცავს პლანკის $\hbar$ მუდმივას, შეიძლება მივიღოთ კლასიკური განხილვით, კვანტური იდეების გამოუყენებლად. ფორმულას იგივე სახე ექნება, თუმცა „შეინილბება“ მისი მიახლოებითი ხასიათი და უცნობი დარჩება მისი სამართლიანობის საზღვრები.

მაიორანა – დირაკის (კვანტურ!) განტოლებაში ტალღული ფუნქციის როლს ასრულებს ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი სამგანზომილებიანი კომპლექსური ვექტორი $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$. ამ ტალღური ფუნქციის მოდულის კვადრატი – კვანტური ალბათობის სიმკვრივე – ემთხვევა კლასიკური ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის სიმკვრივის გამოსახულებას, ხოლო პოინტინგის ვექტორი – კვანტური ალბათობის დენის სიმკვრივეს. შევნიშნოთ, რომ მსგავსი მიდგომა (გარკვეული მოდიფიცირებით) შეიძლება მივუყენოთ კლასიკურ გრავიტაციულ ველსაც (იხ. [7]).

ასეთი პოზიციიდან კლასიკური ველის თანმიმდევრული და სრული განხილვა ჯერ არ არის შესრულებული. მოსალოდნელი შედეგები და მიდგომის პერსპექტივები მოხაზულია მ. ბორნის შრომაში [15].

წარმოდგენილი კვლევის მიზანი

შეფასდეს კლასიკურ ელექტროდინამიკაში არსებული პრობლემების გადაჭრის შესაძლებლობა დამუხტულ წერტილოვანი ნაწილაკის საკუთარი მაგნიტური მომენტის გათვალისწინებით. ხაზგასასმელია, რომ ბუნებაში ასეთი ელემენტარული ნაწილაკი (დამუხტული სკალარი) აღმოჩენილი არ არის. მეცნიერების ისტორიაში ცნობილია შემთხვევები, როდესაც თეორიის პრობლემები უკავშირდებოდა ბუნებაში არარსებული ობიექტების განხილვას (მაგალითად, ფლოგისტონის თეორია, კლასიკური ეთერის პრობლემა, ელექტრონების ორბიტები ატომში და სხვ). ამდენად, მართებული იქნებოდა დამუხტული და საკუთარი მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის განხილვა და ასეთი ნაწილაკის მიერ შექმნილი ველის თვისებების შესწავლა.

კვლევის მეთოდი

გამოსხივების რეაქციის ძალის (RR ძალის) გამოსათვლელად განიხილება ველის რადიაციული (R^{-1} -ის პროპორციული) ნაწილი ნაწილაკის მყისიერ მიმყოფ ინერციულ ათვლის სისტემაში (PF), სადაც ნაწილაკი უძრავია ველის გამოსხივების მომენტში. ამ ველების მეშვეობით გამოთვლილია R რადიუსის სფეროში (ველის გამოსხივების მომენტში ნაწილაკი სფეროს ცენტრშია) $d\tau$ დროში გასული 4-იმპულსი. ენერგია-იმპულსის შენახვის კანონის თანახმად, გამოსხივების რეაქციის ძალა გამოითვლება როგორც $F_{Rad}^i = -dP^i/d\tau$. მიღებული შედეგი არ აკმაყოფილებს პირობას $F^i u_i = 0$. ამ პირობის დასაკმაყოფილებლად განიხილება $F^i = F_{Rad}^i + F_1^i$ ძალა. ამასთან, F_1^i ცალსახად განისაზღვრება მხოლოდ მუხტის მქონე ნაწილაკისთვის (და მიიღება ცნობილი გამოსახულება RR ძალისთვის), ხოლო მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისთვის F_1^i ცალსახად არ განისაზღვრება. მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისთვის მიღებულია ძალის უზოგადესი სახე იმ მოსაზრებებზე დაყრდნობით, რომ ძალის 4-ვექტორი პროპორციული უნდა იყოს მაგნიტური მომენტის კვადრატისა და ჰქონდეს ძალის განზომილება. ანალოგიურად მიღებულია RR ძალის უზოგადესი სახე მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისთვის.

კვლევისას გამოყენებული იყო კომპიუტერული სიმბოლური თვლის მეთოდები. კერძოდ, პროგრამა “Mathematica”.

თავი 1. კლასიკური ელექტროდინამიკის ზოგიერთი პრობლემა

დისერტაციის ეს თავი, ძირითადად, მიმოხილვითი ხასიათისაა, თუმცა აღნიშნულია ჩვენი შედეგების კავშირი ლიტერატურაში მოყვანილ შედეგებთან.

1.1. თვითაჩქარება. წინმსწრები მოქმედება

აჩქარებულად მოძრავი ნაწილაკი ასხივებს ელექტრომაგნიტურ ტალღებს და განიცდის უკუცემას, რაც აიწერება გამოსხივების რეაქციის ძალით. პირველად ეს ძალა არარელატივისტური მიდგომით გამოითვალა ჰ. ა. ლორენცმა (1906, იხ. [1]). მის მიერ გამოყვანილ მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$ma = f_{ext} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{da}{dt}, \quad (1.1.1)$$

სადაც a აღნიშნავს ნიუტონის (არარელატივისტურ) აჩქარებას. როგორც გამომდინარეობს (1.1.1)-დან, მოძრაობის განტოლება (განსხვავებით კლასიკური მექანიკის განტოლებებისგან) გახდა III რიგისა, რაც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არსებითად ცვლის საწყისი პირობების არჩევის და მოძრაობის აღწერის ფიზიკურ ამოცანას.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} = T_0. \quad (1.1.2)$$

ნათელია, რომ T_0 სიდიდის რიგით არის იმ დროის ტოლი, რაც სჭირდება სინათლეს ელექტრონის კლასიკური რადიუსის [7] გასავლელად:

$$T_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{1}{c} = \frac{2}{3} \frac{R_{cl}}{c} \approx 10^{-23} \text{ წმ}. \quad (1.1.3)$$

(1.1.2) აღნიშვნის გამოყენებით მოძრაობის განტოლება (1.1.1) დებულობს შემდეგ სახეს:

$$ma = f_{ext} + mT_0 \frac{da}{dt}. \quad (1.1.4)$$

ამრიგად, რიცხვითი კოეფიციენტი აჩქარების წარმოებულთან სიდიდის რიგით არის ძალიან მცირე. ელექტრონისთვის:

$$mT_0 = (2/3)(e^2/c^3) \approx 10^{-53} \text{ (კგ·წმ)}. \quad (1.1.5)$$

შენიშვნა 1. შეფასებაში (1.1.5), ისე ფორმულებში (1.1.1) – (1.1.3), ვიყენებთ გაუსის ერთეულთა სისტემას; უფრო ზოგად შემთხვევაში უნდა შევცვალოთ $e^2 \rightarrow ke^2$, სადაც კოეფიციენტი $k=1$ გაუსის ერთეულთა სისტემაში და $k=9 \cdot 10^9$ ნ·მ/კლ² SI სისტემაში.

შენიშვნა 2. შეფასება (1.1.5), თანახმად (1.1.3) აღნიშვნისა, დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილაკის მუხტზე და არ არის დამოკიდებული ნაწილაკის მასაზე.

შენიშვნა 3. ატომის ბირთვში მიმდინარე პროცესებში, რაც არსებითია, კერძოდ, ასტროფიზიკურ ობიექტებში მოვლენების კორექტული ინტერპრეტაციისთვის, აჩქარებისა და აჩქარების წარმოებულის სიდიდეები ძალიან დიდ მნიშვნელობებს აღწევს:

$$a = \frac{f}{m} \approx k \frac{Z_N e^2}{R_N^2 m} \approx 200 \frac{Z_N}{A_N^{2/3} m} \approx 100 \frac{A_N^{1/3}}{m}, \quad (1.1.6)$$

$$\frac{da}{dt} \approx \frac{a}{T_N} \approx 100 \frac{A_N^{1/3}}{m T_N}. \quad (1.1.7)$$

აქ Z_N და A_N აღნიშნავს, შესაბამისად, ბირთვის რიგით ნომერს და მასურ რიცხვს მენდელეევის ქიმიურ ელემენტთა პერიოდულ სისტემაში; $R_N \approx 1.23 \cdot 10^{-15} A_N^{1/3}$ (მ) – ბირთვის რადიუსია, T_N – ბირთვული რეაქციების დამახასიათებელი დრო, $T_N \approx 10^{-23}$ წმ; m – ბირთვულ რეაქციაში წარმოქმნილი დამუხტული ნაწილაკის მასა; შეფასებისას ვისარგებლეთ მსუბუქი ბირთვებისთვის დამახასიათებელი თანაფარდობით $A_N \approx 2Z_N$. (1.1.7) შეფასებიდან პროტონისა და ელექტრონისთვის (პიზიტრონისთვის) მივიღებთ, შესაბამისად:

$$\frac{da_p}{dt} \approx 6 \cdot 10^{51} A_N^{1/3}, \quad \frac{da_e}{dt} \approx 1.1 \cdot 10^{55} A_N^{1/3}. \quad (1.1.8)$$

ცხადია, (1.1.4) ფორმულაში შემავალი შესაკრებების წვლილის შესაფასებლად მნიშვნელობა აქვს მათ ფარდობას. თუ საქმე ეხება ბირთვულ რეაქციებს, ამ ფარდობის შესაფასებლად შეიძლება გამოვიყენოთ ფორმულები (1.1.6) და (1.1.7):

$$f_{ext} : \left(m T_0 \frac{da}{dt} \right) \approx a : \left(T_0 \frac{da}{dt} \right) \approx \frac{T_N}{T_0} \approx 1. \quad (1.1.9)$$

(1.1.9) შეფასება არსებითად ეყრდნობა (1.1.3) მნიშვნელობას, რომელიც, თავის მხრივ, გამომდინარეობს ელექტრონის კლასიკური რადიუსის მნიშვნელობიდან. ცნობილია (იხ., მაგ., [7]), რომ კლასიკური ელექტროდინამიკის გამოყენება ასეთ მანძილებზე აღარ არის კორექტული; კლასიკური ელექტროდინამიკის გამოყენების ფარგლები შემოსაზღვრულია ქვემოდან ([7], §37) ელექტრონის კომპტონის ტალღის სიგრძის მნიშვნელობით

$$\lambda_{\text{Compt}} = \hbar / (m_e c) = ke^2 / (m_e c^2) \cdot \hbar c / (ke^2) \approx 137 R_{cl}. \quad (1.1.10)$$

ნათელია, რომ (1.1.10) შეფასების მიღება კლასიკური ელექტროდინამიკის ჩარჩოებში შეუძლებელია, ვინაიდან არსებული თეორია არ შეიცავს პლანკის მუდმივას (ცხადი სახით; იხ. [7], §75). აღვნიშნოთ, რომ ელექტრონის საკუთარი სპინური [18] და მაგნიტური მომენტების გათვალისწინება, შესაძლოა, იძლევა ასეთი შეფასების გაკეთების საფუძველს.

(1.1.4) დიფერენციალური განტოლება წრფივია $a(t)$ აჩქარების მიმართ და მისი ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ [19] შემდეგი სახით:

$$a(t) = \exp(t / T_0) \left[a(0) - (mT_0)^{-1} \int_0^t \exp(-t' / T_0) f_{\text{ext}}(t') dt' \right]. \quad (1.1.11)$$

მიღებული ფორმულა (1.1.11) გვიჩვენებს, რომ $a(t) \neq 0$ მაშინაც კი, როცა $f_{\text{ext}}(t) = 0$. ეს არის კლასიკური ელექტროდინამიკისთვის დამახასიათებელი თვითაჩქარების ცნობილი პრობლემა. მისი გადაჭრის, პირველი შეხედვით, ცხადი გზა არის (1.1.11)-ში საწყისი პირობის არჩევა [19] შემდეგი სახით

$$a(0) = (mT_0)^{-1} \int_0^\infty \exp(-t' / T_0) f_{\text{ext}}(t') dt'. \quad (1.1.12)$$

(1.1.12) და (1.1.4) განტოლებებიდან გამომდინარეობს [19], რომ

$$ma(t) = \int_0^\infty \exp(-\xi) f_{\text{ext}}(t + T_0 \xi) d\xi. \quad (1.1.13)$$

ამრიგად, საწყისი პირობის (1.1.12) არჩევა მოხსნის თვითაჩქარების პრობლემას ($a(t) = 0 \Leftrightarrow f_{\text{ext}}(t) = 0$), მაგრამ წარმოშობს ახალ სირთულეს: აჩქარება $a(t)$ დროის ნებისმიერ მოცემულ t მომენტში დამოკიდებული ხდება გარეშე ძალის მნიშვნელობებზე დროის ყველა მომდევნო მომენტში – თვითაჩქარების პრობლემა მოიხსნა *წინმსწრები მოქმედების* შემოღების ხარჯზე!

ლანდაუსა და ლივშიცის ცნობილ მონოგრაფიაში გამოყვანილია (1.1.4) არარელატივისტური განტოლების რელატივისტური ანალოგი (იხ. [7], §76):

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k + g^i, \quad (1.1.14)$$

სადაც (გაუსის ერთეულთა სისტემაში)

$$g^i = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} - \frac{u^i u^k}{c^2} \frac{d^2 u_k}{d\tau^2} \right) = mT_0 (g^{ik} - c^{-2} u^i u^k) \frac{d^2 u_k}{d\tau^2}. \quad (1.1.15)$$

როგორც აღვნიშნულია ზემოთ, ერთეულთა ნებისმიერ სისტემაში g^i ძალის ჩასაწერად (1.1.15)–ში უნდა შევცვალოთ $e^2 \rightarrow ke^2$ (მარჯვენა მხარეში გამოვიყენეთ აღნიშვნა (1.1.3)).

(1.1.15) ფორმულა პირველად (1905) გამოიყვანა აბრაჰამმა [20]; დირაკმა (1938) გამოიყვანა იგივე შედეგი სხვა მეთოდით [5], მინკოვსკის 4 – განზომილებიანი სივრცე-დროითი ფორმალიზმის გამოყენებით. შესაბამისად, g^i ძალას ხშირად უწოდებენ ლორენც-აბრაჰამ-დირაკის (LAD) ძალას.

1.2. ელექტრომაგნიტური მასა. 4/3 პრობლემა

ჯ. ჯ. ტომსონმა 1881, ჯერ კიდევ ელექტრონის აღმოჩენამდე (1897), გამოითვალა თანაბრად დამუხტული სფეროს ელექტროსტატიკური ველის ენერგია [21] (ეს ფორმულა დაწვრილებით არის გამოყვანილი რ. ფეინმანის ცნობილ ლექციებში [6], თავი 28):

$$W_{st} = \frac{ke^2}{2R}. \quad (1.2.1)$$

თუ ჩავთვლით, როგორც ამას აკეთებს ფეინმანი, რომ ელექტრონის ექსპერიმენტულად დაკვირვებადი მასა მთლიანად არის განპირობებული მისი ელექტრომაგნიტური ველით და გამოვიყენებთ (უძრავი ნაწილაკისთვის) კავშირს მასასა და ენერგიას შორის, ვიპოვით ელექტრონის კლასიკურ რადიუსს [7]:

$$\frac{ke^2}{R_{cl}} = m_e c^2 \quad \Leftrightarrow \quad R_{cl} = \frac{ke^2}{m_e c^2} \approx 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ მ}. \quad (1.2.2)$$

შევნიშნოთ, რომ R_{cl} გამოთვლისას გათვალისწინებულია ელექტრონის მხოლოდ მუხტი და უგულებელყოფილია მისი მაგნიტური მომენტი და ამ მომენტით შექმნილი ველის ენერგია. ამდენად, (1.2.2) ფორმულა იძლევა „შედეგს“ არა ბუნებაში არსებული რეალური ელექტრონისთვის, არამედ მოდელური ობიექტისთვის – თანაბრად დამუხტული უძრავი (და ნულოვანი „მექანიკური“ მასის მქონე) სფეროსთვის. ამ კონტექსტში აუცილებელია აღინიშნოს ა. ჰუანკარეს (1903) მოსაზრებები, რომელთა თანახმად, დამუხტული ნაწილებისგან შედგენილი უძრავი ნაწილაკი ვერ იარსებებს, თუ ამ ნაწილებს არ აკავშირებს ერთმანეთთან სხვა, არაელექტრომაგნიტური ბუნების ძალა (ჰუანკარეს ეს მოსაზრება ირწმუნოს (იხ., მაგ., [22], §19) ზოგადი თეორემის კერძო შემთხვევა). შევნიშნოთ ასევე, რომ R_{cl} ფორმულაში არ არის გათვალისწინებული რიცხვითი კოეფიციენტი 1/2, რომელიც დამოკიდებულია ნაწილაკის მოცულობაში მუხტის განაწილების არჩეულ მოდელზე.

$v \ll c$ სიჩქარით მოძრავი ელექტრონისთვის (უფრო ზუსტად, ზემოთნახსენები მოდელური ობიექტისთვის) [6]- ში გამოყვანილია ფორმულა ველის იმპულსისთვის

$$\vec{p} = \frac{2}{3} \frac{ke^2}{Rc^2} \vec{v} = m \frac{cT_0}{R} \vec{v} \quad (1.2.3)$$

(აქ გამოვიყენეთ (1.1.2) აღნიშვნა), რომელიც გვიჩვენებს, რომ ველის იმპულსი $\vec{p}$ (არარელატივისტური) პროპორციულია ნაწილაკის $\vec{v}$ სიჩქარისა. პროპორციულობის კოეფიციენტს (1.2.3) ფორმულაში უწოდებენ მუხტის ელექტრომაგნიტურ მასას [6]:

$$m_{EM} = \frac{2}{3} \frac{ke^2}{Rc^2}. \quad (1.2.4)$$

რელატივისტური სიჩქარით მოძრაობისას (1.2.3) ფორმულა მიღებს სახეს [6]

$$\vec{p} = \frac{2}{3} \frac{ke^2}{Rc^2} \gamma \vec{v}. \quad (1.2.5)$$

ფარდობითობის კერძო თეორიის თანახმად, პროპორციულობის კოეფიციენტი (1.2.5) ფორმულაში უკავშირდება მოძრავი ნაწილაკის ენერგიას [7]:

$$\frac{2}{3} \frac{ke^2}{Rc^2} \gamma = \frac{W(\vec{v})}{c^2}. \quad (1.2.6)$$

აქედან

$$W(\vec{v}) = \frac{2}{3} \frac{ke^2}{R} \gamma. \quad (1.2.7)$$

(1.2.7) და (1.2.1) ფორმულების შედარება გვაძლევს

$$W(\vec{v}) = \frac{4}{3} W_{st} \gamma. \quad (1.2.8)$$

ფორმულა (1.2.8) წინააღმდეგობაშია ენერგიის ლორენც-ტრანსფორმაციულ თვისებებთან, რამაც ფართო დისკუსია გამოიწვია ფიზიკოსთა საზოგადოებაში. ამ ფორმულაში ზედმეტი რიცხვითი $4/3$ კოეფიციენტის არსებობა შეადგენს ე. წ. „ $4/3$ -ის პრობლემას“. პირველად ეს კოეფიციენტი მიიღო ჯერ კიდევ ჯ. ჯ. ტომსონმა. $4/3$ -ის ახსნის ან მისი „მოსპობის“ მრავალრიცხოვანი მცდელობები იხ. შრომებში [23 a, b]. ამ კუთხით კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, რომ რეალური ელექტრონის საკუთარი მაგნიტური მომენტის გაუთვალისწინებლად ტომსონ – ფეინმანის და სხვა ავტორების გამოთვლები მხოლოდ ფორმალურ-მოდელურ ხასიათს ატარებს.

1.3. ჰიპერბოლური მოძრაობის პრობლემა

მაქს ბორნმა (1909) ჰიპერბოლური უწოდა ნაწილაკის ისეთ მოძრაობას, რომელიც წარმოადგენს თანაბარაჩქარეობის მოძრაობის რელატივისტურ ანალოგს [7]. ასეთი მოძრაობა რეალიზდება წერტილოვანი მუხტის მოძრაობისას ერთგვაროვან მუდმივ ელექტრულ ველში (იხ. თავი 3, ქვეთავი 3.2), თუ ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე მიმართულია ველის დაძაბულობის ვექტორის გასწვრივ და საწყისი აჩქარება გამოწვეულია ამ ველით. ამ შემთხვევაში ნაწილაკი, ცხადია, იმოძრაავს წრფივად და მისი აჩქარების, სიჩქარისა და კოორდინატის დამოკიდებულებას დროზე ექნება შემდეგი სახე (იხ., მაგ., [7], [25]; ამ პუნქტში ჩვენ ვიყენებთ სიგრძისა და დროის ჩვეულებრივ SI ერთეულებს):

$$a = a_0 \left(1 + (a_0 t)^2 / c^2\right)^{-3/2}, \quad v = a_0 t \left(1 + (a_0 t)^2 / c^2\right)^{-1/2}, \quad x = \frac{c^2}{a_0} \left[\left(1 + (a_0 t)^2 / c^2\right)^{1/2} - 1\right], \quad (1.3.1)$$

$$(a_0 = eE/m, \quad v_0 = 0, \quad x_0 = 0)$$

ამასთან

$$t = (c/a_0) \sinh(a_0 \tau / c).$$

ამ ფორმულების გამოყვანა არ წარმოადგენს სირთულეს, მაგრამ საცნობარო მიზნებით შესაბამისი გამოთვლები შეტანილია დამატებაში D.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ არარელატივისტურ ზღვარში (ანუ როცა $a_0 t \ll c$) (1.3.1) ფორმულები გადადის თანაბარაჩქარეობის მოძრაობის ცნობილ ფორმულებში:

$$a = a_0 - \frac{3}{2} \frac{a_0^2}{c^2} t^2 + O((a_0 t/c)^4) = a_0 + O((a_0 t/c)^2),$$

$$v = a_0 t \left(1 - \frac{1}{2} (a_0 t/c)^2 + O((a_0 t/c)^4)\right) = a_0 t \left(1 + O((a_0 t/c)^2)\right), \quad (1.3.2)$$

$$x = a_0 t^2 / 2 + O((a_0 t/c)^2).$$

$t \rightarrow \infty$ ზღვარში (1.3.1) ფორმულები გვაძლევს:

$$a \rightarrow 0, \quad v \rightarrow c,$$

$$x = \frac{c^2}{a_0} \left[\left(1 + (a_0 t)^2 / c^2\right)^{1/2} - 1\right] = ct \left[\frac{(a_0 t)/c}{\left(1 + (a_0 t)^2 / c^2\right)^{1/2} + 1}\right] \rightarrow ct.$$

ვ. გინზბურგმა (1969) ჰიპერბოლური (1.3.1) კანონით მოძრავი ნაწილაკის მიერ ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივების საკითხი დაასახელა კლასიკური ელექტროდინამიკის „მუდმივ პრობლემათა“ შორის [26], [27]. ვ. ლიდსკიმ (2009) გააანალიზა მანამდე არსებული წარმოგენები და გამოიყვანა „ზუსტი ფორმულები წერტილოვანი მუხტის რადიაციული დანაკარგების გამოსათვლელად ჰიპერბოლური მოძრაობის შემთხვევაში“

[28]. რიგ შრომებში [29 *a, b*] ჰიპერბოლურ მოძრაობას იკვლევენ ფარდობითობის ზოგადი თეორიის პოზიციებიდან.

დასახელებული შრომების (და იქ მითითებული სხვა წყაროების) ავტორების ნაწილს მიაჩნია, რომ ჰიპერბოლური (1.3.1) კანონით მოძრავი მუხტი არ ასხივებს, ამიტომ, ცხადია, არც გამოსხივების რეაქციის ძალა იარსებებს. ჩვენს მიერ შესრულებული პირდაპირი გამოთვლები [30] გვიჩვენებს, რომ დიდი R რადიუსის მქონე სფეროში dt დროში გადენილი 4-იმპულსის ნაკადი არსებობს და მუხტის (ველის წყაროს) ჰიპერბოლური მოძრაობის პირობებში არ ხდება ნული. გამოსხივების სიმძლავრე მუხტის მყისიერ თანამდევ ინერციულ სისტემაში გამოითვლება ფორმულით (ე.წ. *ლარმორის ფორმულა*):

$$I = (2/3)e^2 a^2 / c^3 \neq 0. \quad (1.3.3)$$

ამასთან, (1.3.1) ფორმულების გამოყენებით ადვილია ჩვენება, რომ გამოსხივების რეაქციის ძალა იხ., მაგ., [7] §76)

$$F_e^i = (2/3)e^2 (g^{ik} - u^i u^k) d^2 u_k / d\tau^2 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (1.3.4)$$

ჰიპერბოლური მოძრაობის პირობებში ხდება ნულის ტოლი (დაწვრილებით ეს საკითხი განხილულია დისერტაციის მე-3 თავში).

ამ შეუსაბამობას – გამოსხივების რეაქციის ძალის ნულთან ტოლობას, მუხტის მიერ გამოსხივებული ენერგია – იმპულსის ნაკადის არანულოვანი მნიშვნელობისას – უწოდებენ *ჰიპერბოლური მოძრაობის პარადოქსს*.

რიგი ავტორებისა, მათ შორის პ. დირაკი [5], ფ. რორლიხი [2], კ. ტეიტელბოიმი [3] და სხვები (იხ. მიმოხილვა [4] და იქ მითითებული წყაროები), თვლის, რომ ჰიპერბოლური მოძრაობის პარადოქსის გადასაჭრელად საჭიროა განვიხილოთ „კომპლექსი“ – მუხტი და ველის არარადიაციული ნაწილი. ეს მიდგომა გაანალიზებულია ჩვენს შრომაში [30].

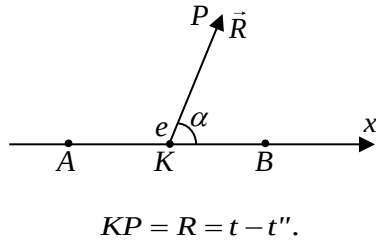
1.4. ენერგია-იმპულსის გადატანა გამოსხივებისას

a) ავტორების უმეტესობა იხილავს დამუხტული ნაწილაკის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველების მხოლოდ რადიაციულ (R^{-1} პროპორციულ) ნაწილს, რადგან დანარჩენ ველებთან დაკავშირებული ენერგია და იმპულსი იკლებს ველის გავრცელებასთან (ანუ R -ის ზრდასთან) ერთად. ამ მოვლენის ილუსტრაცია მოცემულია [31]-ში. ამ შრომაში ჩვენ განვიხილეთ დამუხტული ნაწილაკი, რომელიც მოძრაობს წრფივად მუდმივი სიჩქარით u_1 , როცა $t \in (-\infty, t')$, შემდეგ ჩქარდება AB მონაკვეთზე, როცა $t \in [t', t' + \Delta t']$, შემდეგ, როცა $t \in (t' + \Delta t', +\infty)$, ნაწილაკი ისევ მუდმივი u_2 სიჩქარით მოძრაობს.

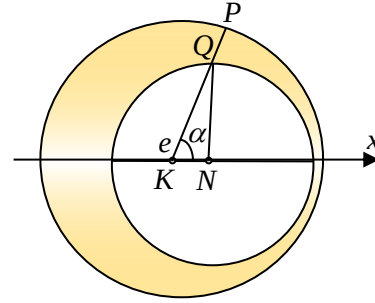
ლიენარ-ვიხერტის პოტენციალები Ox ღერძის გასწვრივ მოძრავი ნაწილაკისთვის გვაძლევს [7]

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{R}, t) &= \frac{e}{(1 - \nu \cos \alpha)^3} \left[\frac{1 - \nu^2}{R^2} (\hat{R} - \nu \hat{x}) + \frac{a}{R} (\hat{R} \cos \alpha - \hat{x}) \right], \\ \vec{H}(\vec{R}, t) &= \frac{e}{(1 - \nu \cos \alpha)^3} (\hat{x} \times \hat{R}) \left[\frac{1 - \nu^2}{R^2} \nu + \frac{a}{R} \right],\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

სადაც $\nu \equiv \nu_x(t'')$; $a \equiv a_x(t'')$; t'' არის მუხტის მიერ ველის გამოსხივების მომენტი; $\cos \alpha$ არის კუთხე Ox ღერძსა და დაკვირვების წერტილის $\vec{R}$ რადიუს-ვექტორს შორის (ნახ.1).



ნახ. 1.



ნახ. 2

მოძრაობის არჩეული რეჟიმში (1.4.1) ფორმულაში შემავალი $a(t)$ აჩქარების დამოკიდებულება დროზე განისაზღვრება ფორმულით:

$$a \equiv a_x(t'') = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, t'), \\ a(t''), & t \in [t', t' + \Delta t'], \\ 0, & t \in (t' + \Delta t', +\infty), \end{cases}\quad (1.4.2)$$

ამასთან, მოთხოვნები $a(t'')$ დამოკიდებულების მიმართ დაკავშირებულია მხოლოდ $(8\pi)^{-1}(E^2 + H^2)$ ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის სიმკვრივის ინტეგრებადობასთან.

რიგ შრომებში (მაგ., [9a,b]) ირჩევენ $a(t'') = \text{const}$, რაც, ჩვენი აზრით, მიუღებელია: მაქსველის განტოლებები შეიცავს $\vec{E}$ და $\vec{H}$ ველების წარმოებულებს, ამიტომ (1.4.2) ფორმულაში წყვეტა გვაძლევს უსასრულობებს მაქსველის განტოლებებში, ეს კი, ჩვენი აზრით, მიღებულ შედეგებს ნაკლებად სანდოს ხდის. ჩვენს შრომებში [31a,b] და შრომებში [10]–[12] კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება $x(t)$ არჩეულია ისე, რომ ყველა წარმოებული მაქსველის განტოლებებში იყოს უწყვეტი (დროის განსახილველ ინტერვალში). შევნიშნოთ, რომ $x(t)$ დამოკიდებულების ასეთი არჩევისას RR ძალაც უწყვეტად იცვლება დროში (ანუ არ გვექნება ე.წ. რბილი დარტყმა – სასრული ნახტომი წერტილოვან მუხტზე მოქმედ ძალაში).

b) თანახმად (1.4.1) ფორმულებისა, ენერგიის სიმკვრივისთვის P წერტილში გვაქვს:

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{e^2}{8\pi(1-\nu \cos \alpha)^6} \left\{ \frac{(1-\nu^2)^2}{R^4} (1+2\nu^2-2\nu \cos \alpha - \nu^2 \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \left(\frac{\dot{\nu}^2}{R^2} + 2\nu \frac{1-\nu^2}{R^3} \right)) \right\}. \quad (1.4.3)$$

განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა dt'' დროის განმავლობაში KN მონაკვეთზე (ნახ. 2), ამასობაში გასხივებული ველები და მათთან დაკავშირებული ენერგია ლოკალიზებულია ცვლადი სისქის უსასრულოდ თხელ შრეში (ნახ. 2), სადაც

$$\begin{aligned} KP = t - t'' = R(t''), \quad NQ = t - (t'' + dt'') = R + dR \\ \Rightarrow dR = -dt'', \quad KN = \nu dt''. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

კოსინუსების თეორემით,

$$\begin{aligned} NQ^2 = KN^2 + KQ^2 - 2KN KQ \cos \alpha \Rightarrow \\ (t - (t'' + dt''))^2 = (\nu dt'')^2 + KQ^2 - 2\nu dt'' KQ \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

აქედან, dt'' -ის მიხედვით წრფივ მიახლოებაში, გვქვია:

$$KQ = (t - t'') - (1 - \nu \cos \alpha) dt''. \quad (1.4.6)$$

(1.4.6)-დან გამომდინარეობს, რომ შრის სიგანეა

$$KP - KQ = QP = (1 - \nu \cos \alpha) dt''. \quad (1.4.7)$$

გამოვსახოთ შრის მოცულობის ელემენტი სფერულ კოორდინატებში. გადავზომოთ რადიუს-ვექტორი K წერტილიდან. გვქვია:

$$\begin{aligned} dV = (1 - \nu \cos \alpha) dt'' R^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \\ = (1 - \nu \cos \alpha) dt'' R^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi, \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

სადაც

$$R = KP = t - t''. \quad (1.4.9)$$

(1.4.3), (1.4.8) და (1.4.9) ფორმულის თანახმად, t_1'' მომენტიდან t_2'' მომენტამდე გამოსხივებული ენერგია იქნება

$$W = (8\pi)^{-1} \int_{t_1''}^{t_2''} dt'' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (t - t'')^2 (1 - \nu \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha (E^2 + H^2). \quad (1.4.10)$$

აქედან, (1.4.2), (1.4.3) და (1.4.10) ფორმულების თანახმად, სივრცის 1, 2, 3 და 4, 5, 6 არეებში (ნახ. 3a და ნახ. 3b) ლოკალიზებული ენერგიისთვის მივიღებთ [31], შესაბამისად:

$$W_1 = f(v_2) \int_{t'+\Delta t'}^{t_1} \frac{1}{(t_1 - t'')^2} dt'', \quad (1.4.11)$$

$$W_2 = \frac{2}{3} e^2 \int_{t'}^{t'+\Delta t'} \frac{\dot{v}^2}{(1-v^2)^3} dt'' + \left(f(v) \left(\frac{1}{t_1 - t''} \right) \right)_{t''=t'}^{t''=t'+\Delta t'}, \quad (1.4.12)$$

$$W_3 = f(v_1) \left(\frac{1}{t_1 - t''} \right)_{t''=-\infty}^{t''=t'}, \quad (1.4.13)$$

$$W_4 = f(v_2) \int_{t'+\Delta t'}^{t_2} \frac{1}{(t_2 - t'')^2} dt'', \quad (1.4.14)$$

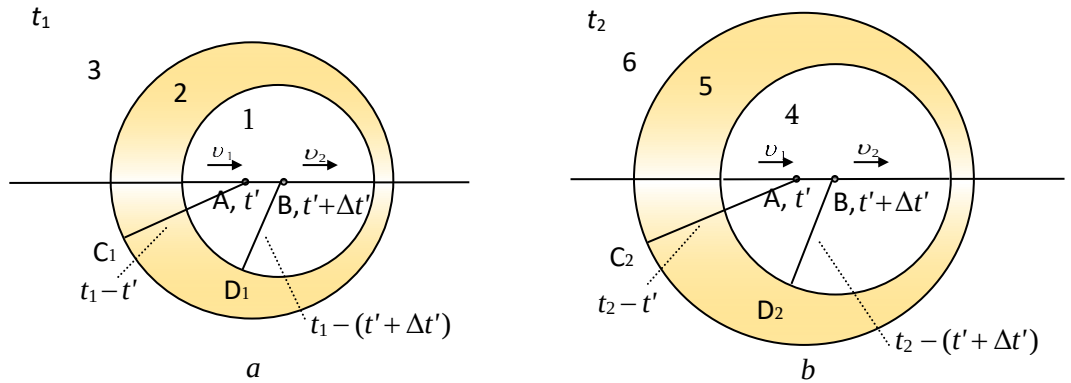
$$W_5 = \frac{2}{3} e^2 \int_{t'}^{t'+\Delta t'} \frac{\dot{v}^2}{(1-v^2)^3} dt'' + \left(f(v) \left(\frac{1}{t_2 - t''} \right) \right)_{t''=t'}^{t''=t'+\Delta t'}, \quad (1.4.15)$$

$$W_6 = f(v_1) \left(\frac{1}{t_2 - t''} \right)_{t''=-\infty}^{t''=t'}. \quad (1.4.16)$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნა:

$$f(v) = \frac{e^2}{6} \frac{3+v^3}{1-v^2}. \quad (1.4.17)$$

ნახ. 3a შეესაბამება დაკვირვების t_1 მომენტს, ხოლო ნახ. 3b – დაკვირვების t_2 მომენტს, $t_2 > t_1$.



ნახ. 3

ენერგიის შენახვის კანონის შესაბამისად, (1.4.11)–(1.4.16) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მუხტის ნებისმიერი მოძრაობისას

$$W_1 + W_2 + W_3 = W_4 + W_5 + W_6, \quad (1.4.18)$$

ან, რაც იგივეა,

$$(W_4 - W_1) + (W_5 - W_2) + (W_6 - W_3) = 0. \quad (1.4.18')$$

შევნიშნოთ, რომ (1.4.11) და (1.4.14) ფორმულებით მოცემული ენერგიები W_1 და W_4

შეიცავს მუხტის უსასრულო საკუთარ ენერგიას, რომელიც (1.4.18') ფორმულაში ბათილდება:

$$\begin{aligned}
 W_4 - W_1 &= f(\nu_2) \left[\int_{t'+\Delta t'}^{t_2} \frac{1}{(t_2 - t'')^2} dt'' - \int_{t'+\Delta t'}^{t_1} \frac{1}{(t_1 - t'')^2} dt'' \right] = \\
 &= f(\nu_2) \left[\int_0^{t_2-t'-\Delta t'} z^{-2} dz - \int_0^{t_1-t'-\Delta t'} z^{-2} dz \right] = f(\nu_2) \int_{t_1-t'-\Delta t'}^{t_2-t'-\Delta t'} z^{-2} dz = \\
 &= f(\nu_2) \frac{t_2 - t_1}{(t_2 - t' - \Delta t')(t_1 - t' - \Delta t')}. \quad (1.4.19)
 \end{aligned}$$

დანარჩენი ორი სხვაობა (1.4.18')-ში სასრულია:

$$\begin{aligned}
 W_5 - W_2 &= \left(f(\nu) \left(\frac{1}{t_2 - t''} \right) \right)_{t''=t'}^{t''=t'+\Delta t'} - \left(f(\nu) \left(\frac{1}{t_1 - t''} \right) \right)_{t''=t'}^{t''=t'+\Delta t'} = \\
 &= (t_2 - t_1) \left\{ f(\nu_1) \frac{1}{(t_2 - t')(t_1 - t')} - f(\nu_2) \frac{1}{(t_2 - t' - \Delta t')(t_1 - t' - \Delta t')} \right\}, \quad (1.4.20)
 \end{aligned}$$

$$W_6 - W_3 = f(\nu_1) \frac{-(t_2 - t_1)}{(t_2 - t')(t_1 - t')}. \quad (1.4.21)$$

შევნიშვნა 1. ფორმულები (1.4.19)–(1.4.21) არ შეიცავს ცხადი სახით ნაწილაკის აჩქარებას (1.4.2), ანუ დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილაკის საწყის ν_1 და საბოლოო ν_2 სიჩქარეზე და დაკვირვების საწყისი t_1 და საბოლოო t_2 მომენტების არჩევაზე (ცხადია, სიჩქარეები ν_1 და ν_2 არ არის ცხადად დამოკიდებული დროზე).

შევნიშვნა 2. როგორც გამომდინარეობს (1.4.17) განმარტებიდან, ფუნქცია $f(\nu)$ იწარჩუნებს დადებით ნიშანს ν ცვალადის ცვლილების მთელ (ფიზიკურ) ინტერვალში:

$$\nu^2 < 1 \Rightarrow f(\nu) > 0. \quad (1.4.22)$$

შევნიშვნა 3. (1.4.22) და (1.4.19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ სხვაობა $W_4 - W_1$ დადებითია და მონოტონურად იზრდება t_2 დროის ზრდასთან ერთად:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt_2} (W_4 - W_1) &= \frac{f(\nu_2)}{(t_1 - t' - \Delta t')} \frac{d}{dt_2} \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t' - \Delta t'} = \\
 &= \frac{f(\nu_2)}{(t_1 - t' - \Delta t')} \frac{t_2 - t' - \Delta t' - (t_2 - t_1)}{(t_2 - t' - \Delta t')^2} = \frac{f(\nu_2)}{(t_2 - t' - \Delta t')^2} > 0. \quad (1.4.23)
 \end{aligned}$$

ანალოგიურად, (1.4.22) და (1.4.19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ სხვაობა $W_6 - W_3$ უარყოფითია და მონოტონურად კლებულობს t_2 დროის ზრდასთან ერთად:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_2}(W_6 - W_3) &= -\frac{f(\nu_1)}{t_1 - t'} \frac{d}{dt_2} \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t'} = \\ &= -\frac{f(\nu_1)}{t_1 - t'} \frac{t_2 - t' - (t_2 - t_1)}{(t_2 - t')^2} = -\frac{f(\nu_1)}{(t_2 - t')^2} < 0. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

გარდავქმნათ გამოსახულება, რომელიც დგას (1.4.20) გამოსახულების ფიგურულ ფრჩხილებში:

$$\begin{aligned} &f(\nu_1) \frac{1}{(t_2 - t')(t_1 - t')} - f(\nu_2) \frac{1}{(t_2 - t' - \Delta t')(t_1 - t' - \Delta t')} = \\ &= [f(\nu_1) - f(\nu_2)] \frac{1}{(t_2 - t')(t_1 - t')} - f(\nu_2) \left[\frac{1}{(t_2 - t' - \Delta t')(t_1 - t' - \Delta t')} - \frac{1}{(t_2 - t')(t_1 - t')} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, გვექნება

$$W_5 - W_2 = -f(\nu)(t_2 - t_1) \left[\frac{1}{(t_2 - t' - \Delta t')(t_1 - t' - \Delta t')} - \frac{1}{(t_2 - t')(t_1 - t')} \right] < 0, \quad (1.4.26)$$

ანუ მე-2 და მე-5 არეში ლოკალიზებულია ენერგია (ნახ. 3), რომელიც ნაწილაკის მიერ გასხივებულია AB მონაკვეთზე აჩქარებული მოძრაობისას, კლებულობს R -ის ზრდასთან ერთად (იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $\nu_1 = \nu_2 = \nu$). ამ კლების ფორმალური მიზეზი ისაა, რომ $\vec{E}$ და $\vec{H}$ ველების (1.4.1) გამოსახულებაში (იხ. აგრეთვე [7], §63) შედის როგორც R^{-1} , ასევე R^{-2} პროპორციული შესაკრებები; შესაბამისად, ენერგიის სიმკვრივე (1.4.3) შეიცავს R^{-2} , R^{-3} და R^{-4} პროპორციულ წევრებს. ცხადია, ეს შესაკრებები სრულ ენერგიაში გვადლევს წვლილს, რომელიც კლებულობს R -ის ზრდასთან ერთად. ამ „წინააღმდეგობის“ ასახსნელად ავტორების უმეტესობა გასხივებულ ენერგიას უკავშირებს მხოლოდ „რადიაციულ“ ველებს (R^{-1} -ის პროპორციულს), რომელთა შესაბამისი ენერგიის ნაკადი, ცხადია, არ იცვლება (ანუ $W_5 - W_2$ სხვაობაში ნულოვანი წვლილი შეაქვს). დანარჩენ ველებს ზოგიერთი ავტორი აკავშირებს ნაწილაკთან და „კომპლექსს“ უწოდებს [2], [3] (იხ. აგრეთვე მიმოხილვა [4]). იგულისხმება, რომ „კომპლექსი“ არ გამოსხივდება და ენერგიის ნაკადში წვლილი არ შეაქვს.

გავუსვათ ხაზი, რომ გამოსხივების პროცესში ნაწილაკის სრული ენერგია, როგორც ამას გვიჩვენებს (1.4.18), (1.4.18') ფორმულები, არ იცვლება, ენერგიის შენახვის კანონთან

სრულ თანხმობაში (მაგრამ ამ თანხმობის მისაღწევად აუცილებელია არა მხოლოდ „რადიაციული“, არამედ R^{-3} და R^{-4} პროპორციული წევრების განხილვაც).

1.5. მაქსველის განტოლებების ჰამილტონური ფორმა

ე. მაიორანამ [13], და რ. ოპენჰეიმერმა [32] (1931) აჩვენეს, რომ მაქსველის განტოლებებთან სისტემა თავისუფალ სივრცეში

$$\varepsilon^{klmn}\partial_l F_{mn} = 0, \quad \partial_l F^{lk} = 0 \quad (k=0,1,2,3) \quad (1.5.1)$$

მისი ჰამილტონის ფორმით წამოდგენისას ფორმალურად ემთხვევა დირაკის ერთ-ნაწილაკოვან (კვანტურ-მექანიკურ!) განტოლებათა სისტემას ნულოვანი მასის ვექტორული ($1\hbar$ სპინის მქონე) ნაწილაკისთვის.

მართლაც (ამ განხილვისას ჩვენ ვეყრდნობით [14], §6, ამოცანა 6.7, სადაც ჩვენ შევასწორეთ ტექნიკური ხასიათის უზუსტობები), განტოლებები (1.5.1) სამგანზომილებიანი ფორმით შეიძლება ჩავწეროთ როგორც

$$\nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{E}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{H}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{H} = 0. \quad (1.5.2)$$

გამოვსახოთ (1.5.2)-ში $\vec{E}$ და $\vec{H}$ ვექტორები კომპლექსური 3-ვექტორებით $\vec{F}$ და $\vec{F}^*$

$$\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}, \quad \vec{F}^* = \vec{E} - i\vec{H} = (\vec{F})^*, \quad (1.5.3)$$

რომლებიც, ცხადია, წრფივად დამოუკიდებელია:

$$\vec{E} = (\vec{F} + \vec{F}^*)/2, \quad \vec{H} = -i(\vec{F} - \vec{F}^*)/2. \quad (1.5.3')$$

გვექნება:

$$\nabla \times \vec{F} = i\partial_t \vec{F}, \quad \nabla \times \vec{F}^* = -i\partial_t \vec{F}^*, \quad \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}^* = 0. \quad (1.5.4)$$

თუ ჩავწერთ (1.5.4) ფორმულას დეკარტის მდგენელებში:

$$(i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})(-i\partial_\beta)F_\gamma = i\partial_t F_\alpha, \quad (i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})(-i\partial_\beta)F_\gamma^* = -i\partial_t F_\alpha^*, \quad (1.5.5')$$

$$(-i\partial_\beta)F_\beta = (-i\partial_\beta)F_\beta^* = 0, \quad (1.5.5'')$$

$$\alpha = 1, 2, 3,$$

და გავითვალისწინებთ, რომ კვანტური მექანიკის ფორმალიზმის თანახმად,

$$-i\hbar\partial_\beta = \hat{p}_\beta, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (1.5.6)$$

(1.5.4) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})\hat{p}_\beta F_\gamma = i\hbar\partial_t F_\alpha, \quad (i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})\hat{p}_\beta F_\gamma^* = -i\hbar\partial_t F_\alpha^*. \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad (1.5.7)$$

შემოვიღოთ 3×3 ერმიტული მატრიცები S_1, S_2, S_3 :

$$S_{1\alpha\gamma} = i\varepsilon_{\alpha 1\gamma} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{2\alpha\gamma} = i\varepsilon_{\alpha 2\gamma} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{3\alpha\gamma} = i\varepsilon_{\alpha 3\gamma} = i \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.5.8)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ მატრიცები (1.5.7) აკმაყოფილებს იმპულსის მომენტისთვის დამახასიათებელ კომუტაციურ თანაფარდობებს:

$$[S_\lambda, S_\mu] = i\varepsilon_{\lambda\mu\nu} S_\nu, \quad (1.5.9)$$

ამასთან, მართებულია ტოლობა

$$S_\lambda S_\lambda \equiv \hat{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2I, \quad (1.5.10)$$

სადაც I აღნიშნავს 3×3 ერთეულოვან მატრიცას. მართლაც, (1.5.8) განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(S_\lambda S_\lambda)_{\alpha\rho} = -\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} \varepsilon_{\gamma\lambda\rho} = \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} \varepsilon_{\rho\lambda\gamma} = 2\delta_{\alpha\rho}. \quad (\alpha, \rho = 1, 2, 3) \quad (1.5.10')$$

ცხადია, (1.5.8) მატრიცები კომუტირებს იმპულსის ოპერატორთან (1.5.6) და, მაშასადამე, წარმოადგენს $s=1$ სპინის შესაბამისი ოპერატორის დეკარტის კომპონენტებს. ამ მატრიცების გამოყენებით (1.5.7) განტოლებები ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$(\hat{S} \cdot \hat{p})_{\alpha\gamma} F_\gamma = i\hbar \partial_i F_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (1.5.11)$$

ან სიმბოლური მატრიცულ – ვექტორული ფორმით

$$(\hat{S} \cdot \hat{p}) \vec{F} = i\hbar \partial_i \vec{F}. \quad (1.5.11')$$

განტოლება (1.5.10') იმეორებს ლეპტონებისთვის დირაკის განტოლებას

$$(\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m)\psi = i\hbar \partial_t \psi, \quad (1.5.12)$$

თუ ჩავთვლით, რომ ლეპტონის მასა ტოლია ნულის (ასეთ განტოლებას ეწოდება ვეილის განტოლება [34], §1.2; [35]). (1.5.11') განტოლებას ხშირად უწოდებენ მაქსველის განტოლებების მაიორანა – დირაკის ფორმას.

კვანტური თეორიის პოზიციებიდან (1.5.11') განტოლება ჩაწერილია ჰამილტონური ფორმით. ამასთან, ჰამილტონიანი

$$\hat{H} = \hat{S} \cdot \hat{p} \quad (1.5.13)$$

წრფივად არის დამოკიდებული იმპულსზე, რაც დამახასიათებელია რელატივისტური თეორიისთვის.

ნაშრომში [33] ნაჩვენებია, რომ შესაძლებელია (1.5.11') განტოლების განზოგადება წყაროების (4-დენის სიმკვრივის) არსებობის შემთხვევაშიც.

მაიორანა – დირაკის (1.5.11') განტოლებებში ტალღური ფუნქციის როლს ასრულებს (1.5.3) კომპლექსური ვექტორი $\vec{F}$. ამ ვექტორის მოდულის კვადრატი,

$$|\vec{F}|^2 = \vec{E}^2 + \vec{H}^2, \quad (1.5.14)$$

ცხადია, უკავშირდება კლასიკური ელექტროდინამიკის ენერგიის სიმკვრივეს, ხოლო პოინტინგის ვექტორი – ალბათობის დენის სიმკვრივეს. პრობლემები, რომლებიც ჩნდება ასეთი ინტერპრეტაციისას და მათი გადაჭრის გზები განხილულია მონოგრაფიაში [34], §2.1. ნათელია, რომ მაქსველის (1.5.1)–(1.5.2) განტოლებებში პლანკის მუდმივას არარსებობა პირდაპირი შედეგია ფოტონის ნულოვანი მასისა – (1.5.11)–(1.5.11') განტოლებებში პლანკის მუდმივა $\hbar$ განტოლების მარჯვენა მხარეში იკვეცება მარცხენა მხარეში იმპულსის (1.5.6) ოპერატორში შემავალ პლანკის მუდმივასთან. შედეგად (ფოტონის ნულოვანი მასის გამო) მაქსველის განტოლებები აღარ შეიცავს კვანტური ფიზიკისთვის დამახასიათებელ $\hbar$ პარამეტრს და „კლასიკურ“ სახეს ღებულობს.

დისკუსია, ელექტროდინამიკის განტოლებების რომელი ფორმაა უფრო ფუნდამენტალური – კლასიკური (1.5.1)–(1.5.2), თუ მაიორანა – დირაკისა (1.5.11)–(1.5.11'), დამატებით კვლევას და არგუმენტებს მოითხოვს. მ. ბორნის აზრით [15], გადამწვეტი არგუმენტები კვანტურ თეორიაში ტალღური ფუნქციის ამპლიტუდის კვადრატის ალბათური (და არა ენერგეტიკული) ინტერპრეტაციის სასარგებლოდ შეიძლება მოგვცეს მხოლოდ არასტაციონარული ინტერფერენციული მოვლენების შესწავლამ. ამ თვალთახედვით, საინტერესოა შედეგები და პრობლემები, რომლებიც აღნიშნულია შრომებში [9] და [11]. ამასთან, [9] ავტორები იხილავენ „საფეხურის“ ტიპის ველებს, რაც მიღებულ შედეგებს ნაკლებად დამაჯერებელს და არასაიმედოს ხდის, ველების წარმოებულებში (და, მაშასადამე, მაქსველის განტოლებებში) წყვეტების გამო.

შრომაში [11], ისევე, როგორც ჩვენს შრომებში [31a,b], მუხტის მოძრაობისას სიჩქარე, აჩქარება და აჩქარების წარმოებული იცვლება უწყვეტად და გლუვად, რაც მაქსველის განტოლებებში წყვეტებს გამორიცხავს.

არასტაციონარული ინტერფერენციის მოვლენებთან დაკავშირებული პრობლემების შესწავლა და ამ პრობლემების გადაჭრისთვის ოპტიმალური მიდგომის დადგენა მომავალი კვლევების საგანია.

თავი 2. დამუხტული ნაწილაკი საკუთარი მაგნიტური მომენტით

კლასიკური ელექტროდინამიკა იხილავს დამუხტულ წერტილოვან ნაწილაკს მისი საკუთარი მაგნიტური მომენტის გაუთვალისწინებლად. მოძრაობის განტოლებას აქვს კარგად ცნობილი [7] სახე:

$$d^2x^k/d\tau^2 = (e/mc)g^{kl}(dx^j/d\tau)F_{jl},$$

თუმცა ბუნებაში ასეთი ელემენტარული ნაწილაკი (დამუხტული სკალარი) აღმოჩენილი არ არის. მეტიც, სტანდარტული მოდელის თანახმად, ყველა დამუხტულ ფუნდამენტურ ნაწილაკს (კვარკს, ლეპლონს, ყალიბრულ ბოზონს) უნდა ჰქონდეს არანულოვანი სპინი და, შესაბამისად, მაგნიტური მომენტი. ამდენად, მართებული იქნებოდა დამუხტული და საკუთარი მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის განხილვა და ასეთი ნაწილაკის მიერ შექმნილი ველის თვისებების შესწავლა. ასეთი მიდგომის პიონერია ი. ფრენკელი [16]. სამწუხაროდ, ციტირებულ შრომაში დაშვებულია ტექნიკური ხასიათის უზუსტობა, რამაც ავტორს კორექტული დასკვნების გაკეთების შესაძლებლობა არ მისცა.

ამ თავში მოყვანილი ჩვენი შედეგები გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [36], [37] და მოხსენებულია კონფერენციაზე XXIII Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED 2018), Sept. 24-27, 2018, Tbilisi, Georgia. <http://ewh.ieee.org/r8/ukraine/georgian/DIPED>.

2.1. ელექტრული მუხტის ელექტრომაგნიტური ველის რადიაციული ნაწილი და შესაბამისი რეაქციის ძალა

ი. ფრენკელმა მუხტის ელექტრომაგნიტური ველის 4-პოტენციალი გამოსახა, როგორც ინტეგრალი τ' კომპლექსურ სიბრტყეზე ([16], ფორმულა (24)):

$$\phi_k(t, \vec{x}) = \frac{-2e}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dx'_k}{X^2} = \frac{-2e}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dx'_k}{d\tau'} \frac{1}{X^2} d\tau'. \quad (2.1.1)$$

აქ τ' ნაწილაკის საკუთარი დროა;

$$X^2 = (x_k - x'_k)(x^k - x'^k) = (t - t')^2 - \vec{R}^2, \quad (2.1.2)$$

$$\vec{R}^2 = R^2 = (x^\alpha - x'^\alpha)(x_\alpha - x'_\alpha). \quad (2.1.3)$$

x'^k და x^k , აღნიშნავს, შესაბამისად, მუხტისა და დაკვირვების წერტილის 4-კოორდინატებს; კონტური Γ შემოსაზღვრავს მხოლოდ ერთ ნამდვილ პოლუსს, $x'^k = x^k$, $x_0 > x'_0$, ანუ $R = t - t'$, $t > t'$. ამრიგად, განიხილება მხოლოდ დაგვიანებული პოტენციალი.

ნაშთთა თეორიის გამოყენებით, ინტეგრალის გამოთვლა გვაძლევს ლიენარ-ვიხერტის 4-პოტენციალს [16], [36]:

$$\phi_k(t, \vec{x}) = -2e \left\{ u_k \left(\frac{dX^2}{d\tau'} \right)^{-1} \right\} \bigg|_{R=X^0} = -2e \left\{ u_k \frac{-1}{2\langle Xu \rangle} \right\} \bigg|_{R=X^0} = e \frac{u_k}{\langle Xu \rangle} \bigg|_{R=X^0}, \quad (2.1.4)$$

სადაც

$$u^k(t') = dx^k/d\tau = \dot{x}^k = -dX^k/d\tau = -\dot{X}^k, \quad k=0,1,2,3,$$

ნაწილაკის 4-სიჩქარე; ნაწილაკის 4-აჩქარებას ისევე, როგორც [7]-ში, აღვნიშნავთ

$$\omega^k(t') = d^2x^k/d\tau^2 = \ddot{x}^k = \dot{u}^k = du^k/d\tau, \quad k=0,1,2,3.$$

$\phi_k(t, \vec{x})$ გამოყენებით შეგვიძლია ვიპოვოთ $\vec{E}(t, \vec{x})$ და $\vec{H}(t, \vec{x})$ დამაბულობები და R რადიუსის სფერულ ზედაპირში $d\tau$ დროში გასული ენერგია და იმპულსი (მუხტი ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული მოცულობის ცენტრშია $\vec{E}(t, \vec{x})$ და $\vec{H}(t, \vec{x})$ ველების გამოსხივების t' მომენტში). განვიხილოთ $\vec{E}$ და $\vec{H}$ დამაბულობების მხოლოდ ის ნაწილები, რომელიც პროპორციულია R^{-1} -ისა (ანუ რადიაციული ნაწილი):

$$\vec{E}_{eRad.}(t, \vec{x}) = \frac{e}{R} \frac{\hat{r} \times [(\hat{r} - \vec{v}) \times \vec{a}]}{(1 - \hat{r} \cdot \vec{v})^3}, \quad \vec{H}_{eRad.}(t, \vec{x}) = \hat{r} \times \vec{E}_{eRad.} \quad (2.1.5)$$

აქ $\hat{r} \equiv \vec{R}/R$; $(t, \vec{x})$ არის წერტილი, სადაც ვაკვირდებით მუხტის ველს, რომელიც t' მომენტში გასხივდა $\vec{x}'(t')$ წერტილში მყოფი მუხტის მიერ; $\vec{v}$ მუხტის სიჩქარეა და $\vec{a}$ მუხტის აჩქარება t' მომენტში. ამ ველებთან დაკავშირებული ენერგია და იმპულსი, რომელიც dt დროში გადის R რადიუსის სფეროში, არ იქნება დამოკიდებული R -ზე. შესაბამისად, სწორედ ამ ენერგიას და იმპულსს მიიჩნევენ [7] გამოსხივების ენერგიად და იმპულსად (ცნობილია [31a, b], რომ $\vec{E}(t, \vec{x})$ და $\vec{H}(t, \vec{x})$ ველების სრული სახით განხილვისას R რადიუსის სფეროში გასული ენერგია და იმპულსი მცირდება, როცა სფეროს რადიუსი R იზრდება).

განვიხილოთ მუხტის მყისიერად მიმყოლი ინერციული სისტემა (PF), რომელშიც მუხტი უძრავია t' (ანუ τ) მომენტში. ამ სისტემაში გვექნება:

$$\vec{E}_{eRad.}^{PF}(t, \vec{x}) = (e/R) \left(\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \right) \Big|^{PF}, \quad (2.1.6)$$

$$\vec{H}_{eRad.}^{PF}(t, \vec{x}) = (e/R)(\vec{a} \times \hat{r}) \Big|^{PF}. \quad (2.1.7)$$

PF-ში $(t, \vec{x})$ მსოფლიო წერტილში ველის ენერგიისა და იმპულსის სიმკვრივებია:

$$\frac{E_{eRad.}^{PF\ 2} + H_{eRad.}^{PF\ 2}}{8\pi} = \frac{e^2}{4\pi R^2} \left[a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2 \right] \Big|^{PF}, \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\vec{E}_{eRad.}^{PF} \times \vec{H}_{eRad.}^{PF}}{4\pi} = \frac{e^2 \hat{r}}{4\pi R^2} \left[a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2 \right] \Big|^{PF}. \quad (2.1.9)$$

აღსანიშნავია, რომ ბრტყელი ტალღის მსგავსად, ამ შემთხვევაშიც გვაქვს

$$E_{eRad.}^{PF\ 2} - H_{eRad.}^{PF\ 2} = 0, \quad \vec{E}_{eRad.}^{PF} \cdot \vec{H}_{eRad.}^{PF} = 0. \quad (2.1.10)$$

გამოვთვალოთ R რადიუსის სფეროში $d\tau$ დროში (ეს დროითი შუალედი გაზომილია ნაწილაკის საკუთარ სისტემაში) გასული ენერგია და იმპულსი; სფერულ კოორდინატებში გვექნება:

$$\begin{aligned} dW_{eRad.}^{PF} &= (8\pi)^{-1} R^2 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (E_{eRad.}^{PF\ 2} + H_{eRad.}^{PF\ 2}) = \\ &= e^2 (4\pi)^{-1} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left[a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2 \right] \Big|^{PF} = dt' (2/3) e^2 a^2 \Big|^{PF}, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned} d\vec{P}_{eRad.}^{PF} &= (8\pi)^{-1} R^2 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (E_{eRad.}^{PF\ 2} + H_{eRad.}^{PF\ 2}) = \\ &= (4\pi)^{-1} e^2 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \hat{r} \left[a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2 \right] \Big|^{PF} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

(2.1.11) თანაფარდობას ლარმორის ფორმულა ეწოდება (იხ., მაგ., [17]).

ენერგია-იმპულსის მუდმივობის კანონისა და მოძრაობის განტოლების გათვალისწინებით, (2.1.11) და (2.1.12) გვიჩვენებს, რომ მიმყოფ სისტემაში ნაწილაკზე მოქმედი 4-ძალა გამოისახება შემდეგი კომპონენტებით

$$F_{eRad.}^{iPF} = (-dW_{eRad.}^{PF}/d\tau, d\vec{P}_{eRad.}^{PF}/d\tau) = (-(2/3)e^2 a^2, \vec{0}) \Big|^{PF}. \quad (2.1.13)$$

კოვარიანტული ფორმით (2.1.13) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F_{eRad.}^i = (2/3)e^2 \omega^2 u^i = -(2/3)e^2 \dot{\omega}_k u^k u^i. \quad (2.1.14)$$

ცხადია, (2.1.14) ძალა არ აკმაყოფილებს პირობას

$$F^i u_i = 0, \quad (2.1.15)$$

რომელიც სამართლიანი უნდა იყოს ნებისმიერი 4-ძალისთვის. როგორც ცნობილია [7], ამ პირობის დაკმაყოფილება ხერხდება (2.1.15) ფორმულაში ე. წ. შოტის წევრის [17] დამატებით:

$$F_e^i = (2/3)e^2 \left(d^2 u^i / d\tau^2 - u^i u^k d^2 u_k / d\tau^2 \right). \quad (2.1.16)$$

აღსანიშნავია, რომ [17]-ში, ისევე, როგორც ჩვენს შრომებში [36], [37] (2.1.14) ფორმულის და (2.1.15) პირობის გამოყენებით მიიღება შოტის წევრი, მაგრამ იმის გამო, რომ ავტორები არ იხილავენ ნაწილაკის საკუთარ სისტემას, [17]-ში ეს შედეგი მტკიცდება მხოლოდ პერიოდული მოძრაობისთვის. ამასთან, [17]-ში ავტორები მიიჩნევენ, რომ ენერგია-იმპულსის მუდმივობის კანონი შესრულებულია მხოლოდ დროში გასაშუალოებული სიდიდეებისთვის. ჩვენი [36] [37] განხილვიდან გამომდინარეობს, რომ ეს შედეგი სამართლიანია ნებისმიერი სახის მოძრაობისთვის და ენერგია-იმპულსის მუდმივობის კანონის შესასრულებლად არ არის საჭირო დროში გასაშუალოება.

2.2. მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ველის 4-პოტენციალი

a) მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ველის 4-პოტენციალი ი. ფრენკელმა წარმოადგინა (2.1.1) გამოსახულების ანალოგიური ფორმით ([16] ფორმულა (25a)):

$$\varphi_k(t, \vec{x}) = \frac{-4}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\mu'_{kl} X^l}{X^4} d\tau', \quad (2.2.1)$$

სადაც $\mu'_{kp} = \mu_{kp}(\tau')$,

$$\mu_{kl}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & d_x & d_y & d_z \\ -d_x & 0 & -m_z(\vec{v}) & m_y(\vec{v}) \\ -d_y & m_z(\vec{v}) & 0 & -m_x(\vec{v}) \\ -d_z & -m_y(\vec{v}) & m_x(\vec{v}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

ნაწილაკის საკუთარ სისტემაში ამ ტენზორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mu_{ik}^{PF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_z & m_y \\ 0 & m_z & 0 & -m_x \\ 0 & -m_y & m_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.3)$$

სადაც $\vec{m}$ ნაწილაკის მაგნიტური მომენტი საკუთარ ათვლის სისტემაში. შესაბამისად, ნებისმიერი მიმართულებით (და არა Ox ღერძის გასწვრივ) მოძრავ ათვლის სისტემაში ლორენც-გარდაქმნის შედეგად:

$$\vec{d} = -\gamma(\vec{v} \times \vec{m}), \quad \vec{m}(\vec{v}) = \gamma \vec{m} + (1 - \gamma) \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{m})v^{-2}. \quad (2.2.4)$$

აქ $\vec{v}$ ნაწილაკის 3-სიჩქარეა, $\vec{m}(\vec{v})$ – ნაწილაკის მაგნიტური მომენტი; $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$.

(2.2.2) ტენზორის ერთადერთი არანულოვანი ლორენც-ინვარიანტია:

$$\vec{m}(v)^2 - \vec{d}^2 = \vec{m}(\vec{v})^2 - \vec{v}_\perp^2 \vec{m}(\vec{v})^2 = \vec{m}^2. \quad (2.2.5)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $\vec{d} = -\gamma(\vec{v} \times \vec{m}) = -(\vec{v} \times \vec{m}(\vec{v}))$. მაშასადამე

$$|\vec{m}(\vec{v})| = |\vec{m}|(1 - v_\perp^2)^{-1/2}, \quad (2.2.6)$$

სადაც $\vec{v}_\perp$ არის ნაწილაკის სიჩქარის მდგენელი, რომელიც მართობულია $\vec{m}(\vec{v})$ -ის.

(2.2.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \mu_{kl} u^l &= 0, & \Rightarrow \\ \dot{\mu}_{kl} u^l + \mu_{kl} \omega^l &= 0, \\ \ddot{\mu}_{kl} u^l + 2\dot{\mu}_{kl} \omega^l + \mu_{kl} \dot{\omega}^l &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

რაც შესაბამისობაშია (2.2.4) და (2.2.5) თანაფარდობებთან.

b) (2.2.1) ფორმულაში შემავალი ინტეგრალი გამოითვლება (იხ. [16], [36]) ნაშთთა თეორიის მეთოდებით. ცნობილია, რომ, თუ $F(z)$ ფუნქციას $z = a$ წერტილში აქვს მეორე რიგის პოლუსი, მაშინ (იხ. [39] გვ. 84 ფორმულა (3)):

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma F(z) dz = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \left\{ (z - a)^2 F(z) \right\}. \quad (a \notin \Gamma) \quad (2.2.8)$$

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{\phi(z)} dz.$$

თუ $f(z)$ ფუნქციას კონტურის შიგნით არ აქვს პოლუსები, ხოლო

$$\psi(z) = \frac{\psi''(a)}{2!} (z - a)^2 + \frac{\psi'''(a)}{3!} (z - a)^3 + O((z - a)^4), \quad (2.2.9)$$

მაშინ, (2.2.9) თანახმად,

$$I = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{f(z)}{\frac{\psi''(a)}{2!} + \frac{\psi'''(a)}{3!} (z - a) + O((z - a)^2)} \right\} = \frac{2f'(a)}{\psi''(a)} - \frac{2f(a)}{3(\psi''(a))^2} \psi'''(a). \quad (2.2.10)$$

ისევე, როგორც [36], [37], გამოვიყენოთ (2.2.10) ფორმულა (2.2.1) 4-პოტენციალის გამოსათვლელად. ამისთვის ჯერ განვიხილოთ $X^2 = (x_k - x'_k)(x^k - x'^k)$ გამოსახულების წარმოდგენები ნაწილაკის საკუთარი τ დროით:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} X^4 \Big|_{R=X^0} &= -4X^2 X^k u_k \Big|_{R=X^0} = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} X^4 \Big|_{R=X^0} &= 4 \left[2(X^k u_k)^2 - X^2 (X^i \omega_i - 1) \right] \Big|_{R=X^0} = 8(X^k u_k)^2 \Big|_{R=X^0}, \\ \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} X^4 \Big|_{R=X^0} &= 4 \left[6X^k u_k (X^i \omega_i - 1) - X^2 X^i \frac{\partial}{\partial \tau} \omega_i \right] \Big|_{R=X^0} = 24X^k u_k (X^i \omega_i - 1) \Big|_{R=X^0}.\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

(2.2.10) და (2.2.11) ფორმულების გამოყენებით ვპოულობთ პოტენციალს:

$$\phi^k(t, \vec{x}) = - \left\{ \frac{\dot{\mu}^{kl} X_l}{\langle Xu \rangle^2} + \frac{\mu^{kl} X_l}{\langle Xu \rangle^3} (1 - \langle X \omega \rangle) \right\} \Big|_{R=X^0}. \quad (2.2.12)$$

(2.2.12) გამოყვანისას გათვალისწინებულია (2.2.8) თანაფარდობა.

ჩვენს მიერ [36] მიღებული გამოსახულება (2.2.12) განსხვავდება [16]-ში ი. ფრენკელის მიერ მიღებული ფორმულისგან:

$$\phi_M^k(t, \vec{x}) = \frac{X_l}{\langle Xu \rangle^2} \left[\dot{\mu}^{lk} + \mu^{lk} \left(\frac{1 - \gamma^2 \vec{R} \cdot \vec{a}}{\langle Xu \rangle} - \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a} \right) \right]. \quad (2.2.13)$$

ამასთან, ცხადია, რომ შეკრულ კონტურზე ინტეგრებით გამოთვლილმა პოტენციალმა (2.2.1) უნდა დააკმაყოფილოს პირობა:

$$\partial_k \phi_M^k(t, \vec{x}) = 0, \quad (2.2.14)$$

ჩვენი გამოსახულება (2.2.12) აკმაყოფილებს ამ პირობას, ხოლო (2.2.13) – არა. ამის ჩვენება ადვილია, თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ თანაფარდობებს [7], § 63:

$$\begin{aligned}\partial_k \tau \Big|_{R=X^0} &= g_{lk} X^l \langle Xu \rangle^{-1} \Big|_{R=X^0} \\ \partial_k X^i \Big|_{R=X^0} &= \delta_k^i + X_k \langle Xu \rangle^{-1} \frac{\partial X^i}{\partial \tau} \Big|_{R=X^0} = \delta_k^i - X_k \langle Xu \rangle^{-1} u^i, \\ \partial_k (X^l u_l) &= u_k + X_k \langle Xu \rangle^{-1} (\langle X \omega \rangle - 1) \\ \partial_n u^k &= X_n \langle Xu \rangle^{-1} \omega^k.\end{aligned}\quad (2.2.15)$$

შედეგის მიღებას აგრეთვე აადვილებს შემდეგი აღნიშვნები:

$$\rho = \langle Xu \rangle \Big|_{R=X^0} = \gamma(R - \vec{R} \cdot \vec{v}), \quad \xi^l = X^l \langle Xu \rangle^{-1} \Big|_{R=X^0}, \quad (2.2.16)$$

$$\xi^2 = \xi_k \xi^k = 0, \quad \xi_k u^k = 1, \quad \partial_k \xi^k = 2\rho^{-1}. \quad (2.2.17)$$

(2.2.13)-ის მიღებისას ი. ფრენკელის [16] მიერ (2.2.10) გაშლაში შეინარჩუნებული იყო მხოლოდ პირველი შესაკრები, იმის მიუხედავად, რომ, (2.2.8) ფორმულის თანახმად, (2.2.10) გაშლის მეორე შესაკრებს აგრეთვე შეაქვს წვლილი (2.2.12) შედეგში. ამ მცდარი გამოყვანის დეტალები და შედეგები დაწვრილებით არის გაანალიზებული ნაშრომში [36] და დისერტაციის დამატებაში C.

c) განვიხილოთ უძრავი ნაწილაკის შესაბამისი 4-პოტენციალი. ამ შემთხვევაში (2.2.12)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi^0 = 0, \quad \vec{\varphi} = \frac{\dot{\vec{m}} \times \hat{\vec{r}}}{R} + \frac{\vec{m} \times \hat{\vec{r}}}{R^2};$$

კერძოდ, თუ $\vec{m} = \text{const}$, მაშინ

$$\varphi^0 = 0, \quad \vec{\varphi} = \frac{\vec{m} \times \hat{\vec{r}}}{R^2},$$

რაც ემთხვევა $\vec{m}$ მაგნიტური მომენტის მქონე შეკრული ელემენტარული დენის 4-პოტენციალს (იხ., მაგ., [6], [22]), როდესაც მანძილი დენიან კონტურამდე ბევრად აღემატება კონტურის ზომებს. მართლაც, მაგნიტური მომენტის მქონე დაუმუხტავი წერტილოვანი ნაწილაკის მოდელად შეგვიძლია განვიხილოთ დენიანი კონტური, რომლის ზომა ნულისკენ მიისწრაფის, მაგრამ მაგნიტური მომენტი რჩება სასრული სიდიდისა.

2.3. მაგნიტური 4-დენის სიმკვრივე.

a) (2.2.12) პოტენციალის გადაწერა შესაძლებელია შემდეგი სახით:

$$\varphi_M^k(t, \vec{x}) = - \left\{ \frac{\mu^{kl} X_l}{\langle Xu \rangle^2} + \frac{\mu^{kl} X_l}{\langle Xu \rangle^3} (1 - \langle X \omega \rangle) \right\} \Big|_{R=X^0} = - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\mu^{kl}}{\langle Xu \rangle} \Big|_{R=X^0}. \quad (2.3.1)$$

აქ გათვალისწინებულია (2.2.15) და (2.2.7) ფორმულები.

(2.3.1) პოტენციალი ჩაწერილია ლორენცის ყალიბრებაში ($\partial^k \varphi_{Mk}(t, \vec{x}) = 0$), ამიტომ მისთვის მაქსველის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე ((2.2.16) აღნიშვნებში):

$$\partial^n F_{Mnk}(\vec{r}, t) = \partial_n \partial^n \varphi_M^k(t, \vec{x}) = \partial_n \partial^n \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\mu^{lk}}{\rho} \Big|_{R=X^0} \right) = 4\pi j^k. \quad (2.3.2)$$

თავი 4, 4.1 – ში ნაჩვენებია, რომ დასაშვებია წარმოებულების გადასმა, მიუხედავად იმისა, რომ გასაწარმოებელ ფუნქციას აქვს პოლუსი წერტილში $R = X^0$:

$$\left. \partial^n \partial_n \partial_l \frac{\mu^{kl}}{\rho} \right|_{R=X^0} = \left. \partial_l \partial^n \partial_n \frac{\mu^{kl}}{\rho} \right|_{R=X^0}. \quad (2.3.3)$$

საბოლოოდ, 4-დენის სიმკვრივისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} j^k(t, \vec{x}) &= (4\pi)^{-1} \partial_l \partial^n \partial_n (\mu^{lk} \rho^{-1}) = \\ &= (4\pi)^{-1} \partial_l (\mu^{lk} \partial^n \partial_n \rho^{-1}) + (4\pi)^{-1} \partial_l (2(\partial^n \rho^{-1})(\partial_n \mu^{lk}) + \rho^{-1} \partial^n \partial_n \mu^{lk}). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$\partial^n \partial_n \rho^{-1}$ წარმოებულის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ცნობილი შედეგი, რომელიც მიღებულია ელექტრული მუხტის მქონე ნაწილაკის განხილვისას [7]:

$$\partial^n \partial_n (u_k \rho^{-1}) = 4\pi \gamma^{-1}(t) u_k(t) \delta(\vec{R}). \quad (2.3.5)$$

აღსანიშნავია, რომ ამ ტოლობაში დრო ტოლია t -სი, რადგან ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულისგან განსხვავდება მხოლოდ $R = 0$ წერტილში.

გამოთვლები (2.3.5) და (2.2.15) – (2.2.17) ტოლობების გათვალისწინებით, გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \partial^n \partial_n \rho^{-1} &= \partial^n \partial_n (u^k u_k \rho^{-1}) = \\ &= u^k \partial^n \partial_n (u_k \rho^{-1}) + 2(\partial^n u^k) \partial_n (u_k \rho^{-1}) + u_k \rho^{-1} \partial^n \partial_n u^k = \\ &= u^k(t) (4\pi \gamma^{-1}(t) u_k(t) \delta(\vec{R})) = 4\pi \gamma^{-1}(t) \delta(\vec{R}). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

(2.2.15), (2.2.17) და (2.3.6) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ [36]:

$$\begin{aligned} j^k(t, \vec{x}) &= \partial_l (\mu^{lk} \gamma^{-1} \delta(\vec{R})) + (4\pi)^{-1} \partial_l (\rho^{-1} \partial^n (\dot{\mu}^{lk} \xi_n) - 2\rho^{-2} \dot{\mu}^{lk}) = \\ &= \partial_l (\mu^{lk} \gamma^{-1} \delta(\vec{R})) + \partial_l \left[(4\pi \rho)^{-1} (\dot{\mu}^{lk} \xi_n \xi_n + \dot{\mu}^{lk} \partial^n \xi_n - 2\rho^{-1} \dot{\mu}^{lk}) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

პირდაპირი გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ კვადრატულ ფრჩხილში მეორე თანამამრავლი იგივეურად ნულია. ამიტომ, (2.3.4)-ის თანახმად, საბოლოოდ გვექნება

$$j^k(t, \vec{x}) = \partial_l (\mu^{lk}(t) \gamma^{-1}(t) \delta(\vec{R})). \quad (2.3.8)$$

G დამატებაში ამ შედეგის სამართლიანობა ნაჩვენებია პოტენციალზე მოქმედი დიფერენციალური ოპერატორის გრინის ფუნქციის გამოყენებით.

b) ვაჩვენოთ, რომ (2.3.8) 4-დენის სიმკვრივის შესაბამისი მაგნიტური მუხტი = 0. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\mu^{00} = 0$ (იხ. ფორმულა (2.2.2)), 4-დენის სიმკვრივის მდგენელებისთვის მივიღებთ:

$$j^0(t, \vec{x}) = \partial_\alpha [\mu^{\alpha 0}(t) \gamma^{-1}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}'(t))] = \mu^{\alpha 0}(t) \gamma^{-1}(t) \partial_\alpha \delta(\vec{x} - \vec{x}'(t)), \quad (2.3.9)$$

$$j^\alpha(t, \vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}'(t)) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu^{0\alpha}(t)}{\gamma(t)} + \frac{\mu^{\beta\alpha}(t) - \mu^{0\alpha}(t) v^\beta(t)}{\gamma(t)} \partial_\beta \delta(\vec{x} - \vec{x}'(t)). \quad (2.3.10)$$

ნაპოვნი მაგნიტური დენის სიმკვრივის შესაბამისი მაგნიტური მუხტის გამოსათვლელად ავიღოთ j_0 -დან ინტეგრალი რაიმე V მოცულობით, რომელიც შეიცავს $\vec{r}'(t')$ წერტილს. გაუსის ინტეგრალური ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mu^{0\alpha}(\tau) \gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t')) dV = \oint_{\partial V} \mu^{0\alpha}(\tau) \gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t')) dS_\alpha = 0 \quad (2.3.11)$$

(აქ გავითვალისწინეთ, რომ $\vec{r}'(t') \notin \partial V$). ამრიგად, როგორც მოსალოდნელი იყო, (2.3.8) მაგნიტური 4-დენის სიმკვრივის შესაბამისი მაგნიტური მუხტი ნულის ტოლია.

2.4. მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის რადიაციული ნაწილი და შესაბამისი რეაქციის ძალა

ვიპოვოთ (2.4.13) – ით მოცემული $\varphi_k(t, \vec{x})$ 4-პოტენციალის წარმოებულის:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi_M^k(t, \vec{x}) = \\ = \rho^{-2} \left\{ (\langle X \omega \rangle - 1) \rho^{-1} \mu^{kl} \left[-3\xi_l \xi_i (\langle X \omega \rangle - 1) - 3\xi_l u_i + g_{li} \right] + \mu^{kl} \xi_l \left[\xi_i \langle X \dot{\omega} \rangle + \omega_i \right] - \right. \\ \left. + \dot{\mu}^{kl} \left[3\xi_l \xi_i (\langle X \omega \rangle - 1) - g_{li} + u_l \xi_i + 2\xi_l u_i \right] - \rho \ddot{\mu}^{kl} \xi_l \xi_i \right\} \Big|_{R=X^0}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

აქ გამოყენებულია შემდეგი ფორმულები (2.2.7), (2.2.15) – (2.2.17) და შემდეგი ცხადი თანაფარდობები:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \xi_i, \quad \frac{\partial X^i}{\partial x^k} = \delta_k^i - u^i \xi_k. \quad (2.4.2)$$

ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორისთვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} F_{ik}(t, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi_k(t, \vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi_i(t, \vec{x}) = \\ = \rho^{-2} \left(2\mu_{ki} \rho^{-1} (\langle X \omega \rangle - 1) - 2\dot{\mu}_{ki} + (\mu_{kn} \omega_i - \mu_{in} \omega_k) \xi^n - \rho (\dot{\mu}_{kn} \xi_i - \dot{\mu}_{in} \xi_k) \xi^n + \right. \\ \left. + 3(\dot{\mu}_{kn} \xi_i - \dot{\mu}_{in} \xi_k) \xi^n (\langle X \omega \rangle - 1) - 3\rho^{-1} (\mu_{kn} \xi_i - \mu_{in} \xi_k) \xi^n (\langle X \omega \rangle - 1)^2 + 2(\dot{\mu}_{kn} u_i - \dot{\mu}_{in} u_k) \xi^n + \right. \\ \left. + (\mu_{kn} \xi_i - \mu_{in} \xi_k) \xi^n \langle X \dot{\omega} \rangle - 3\rho^{-1} (\mu_{kn} u_i - \mu_{in} u_k) \xi^n (\langle X \omega \rangle - 1) - (\mu_{kn} \xi_i - \mu_{in} \xi_k) \omega^n \right) \Big|_{R=X^0}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

აღსანიშნავია, რომ ყველგან, სადაც $|\vec{X}| = R \neq 0$, გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial x^i} F^{ik}(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.4.4)$$

განვიხილოთ F_{ik} ტენზორის რადიაციული (R^{-1} პროპორციული) ნაწილი:

$$\begin{aligned} F_{ik \text{ Rad}}(t, \vec{x}) = \rho^{-1} \left((\dot{\mu}_{in} \xi_k - \dot{\mu}_{kn} \xi_i) \xi^n - 3(\dot{\mu}_{in} \xi_k - \dot{\mu}_{kn} \xi_i) \xi^n \langle \xi \omega \rangle + \right. \\ \left. + 3(\mu_{in} \xi_k - \mu_{kn} \xi_i) \xi^n \langle \xi \omega \rangle^2 - (\mu_{in} \xi_k - \mu_{kn} \xi_i) \xi^n \langle \xi \dot{\omega} \rangle \right) \Big|_{R=X^0}^{PF}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

განვიხილოთ ეს ტენზორი ნაწილაკის მყისიერ მიმყოფ ინერციულ სისტემაში – ნაწილაკის საკუთარ სისტემაში (PF). შესაბამისად, $\vec{E}_{M \text{ Rad}}^{PF}$ და $\vec{H}_{M \text{ Rad}}^{PF}$ დამაბულობები გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{M \text{ Rad}}^{PF}(t, \vec{x}) = \frac{1}{R} \left\{ \left[2\hat{r} \cdot (\vec{a} \times \dot{\vec{m}}) + 3(\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{m}) + \hat{r} \cdot (\dot{\vec{a}} \times \vec{m}) \right] \hat{r} - (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\hat{r} \times \vec{a}) - \right. \\ \left. 2(\vec{a} \times \dot{\vec{m}}) - (\dot{\vec{a}} \times \vec{m}) + (\hat{r} \times \ddot{\vec{m}}) - 3(\hat{r} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \times \vec{m}) + 3(\hat{r} \cdot \vec{a}) (\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) + \left[3(\hat{r} \cdot \vec{a})^2 + \hat{r} \cdot \dot{\vec{a}} \right] (\hat{r} \times \vec{m}) \right\} \Big|_{R=X^0}^{PF}, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$\vec{H}_{M Rad.}^{PF}(t, \vec{x}) = \frac{1}{R} \left\{ -2\hat{r} \times (\vec{a} \times \dot{\vec{m}}) - \hat{r} \times (\dot{\vec{a}} \times \vec{m}) - 3(\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} \times (\vec{a} \times \vec{m}) - \ddot{\vec{m}} + (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{a} - 3(\hat{r} \cdot \vec{a}) \dot{\vec{m}} - \right. \\ \left. \left[3(\hat{r} \cdot \vec{a})^2 + \hat{r} \cdot \dot{\vec{a}} \right] \vec{m} + \left[\hat{r} \cdot \ddot{\vec{m}} - (\vec{a} \cdot \vec{m}) \hat{r} \cdot \vec{a} + 3(\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} \cdot \dot{\vec{m}} + (\hat{r} \cdot \dot{\vec{a}}) \hat{r} \cdot \vec{m} + 3(\hat{r} \cdot \vec{a})^2 \hat{r} \cdot \vec{m} \right] \hat{r} \right\}^{PF} \quad (2.4.7)$$

(2.4.6) და (2.4.7) ფორმულების მიღებისას ვისარგებლეთ [36], [37] შრომებში გამოყვანილი ფორმულებით (იხ. დამატებები A, B, და E); ნაწილაკის დამახასიათებელი სიდიდეები – აჩქარება $\vec{a}$ და აჩქარების წარმოებული $\dot{\vec{a}}$ აღებულია ველების გამოსხივების მომენტში.

აღსანიშნავია, რომ (2.1.10)-ის მსგავსად, სრულდება ბრტყელი ტალღისთვის დამახასიათებელი თანაფარდობები:

$$E_{M Rad.}^{PF\ 2} = H_{M Rad.}^{PF\ 2}, \quad \vec{E}_{M Rad.}^{PF} \cdot \vec{H}_{M Rad.}^{PF} = 0, \quad (2.4.8)$$

რაც ნიშნავს, რომ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის ორივე ინვარიანტი = 0:

$$E_{M Rad.}^2 - H_{M Rad.}^2 = 0, \quad (2.4.9)$$

$$(\vec{E}_{M Rad.} \cdot \vec{H}_{M Rad.})^2 = 0. \quad (2.4.10)$$

გავიმეოროთ (2.4.6) და (2.4.7) ველებისთვის 2.1 ქვეთავში შესრულებული გამოთვლები (იხ. ფორმულები (2.1.8) – (2.1.12)). განვიხილოთ R რადიუსის სფეროში $d\tau$ დროში გასული ენერგია და იმპულსი, ანუ მუხტის მიერ $d\tau$ დროში გამოსხივებული ენერგია და იმპულსი (მუხტი R რადიუსის სფეროს ცენტრშია $\vec{E}$ და $\vec{H}$ ველების გამოსხივების მომენტში). სიმბოლური კომპიუტერული გამოთვლები [36], [37] გვაძლევს:

$$dW_{M Rad.}^{PF} = R^2 d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{E_{M Rad.}^{PF\ 2} + H_{M Rad.}^{PF\ 2}}{8\pi} = \\ (d\tau / 105) [70\dot{\vec{m}}^2 + 112a^2\dot{\vec{m}}^2 + 14(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})^2 - 14(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) + 4a^2(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 + 28(\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) - \\ 14(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})^2 - 42(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) - 42a^2(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) + 98(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) + 36a^4m^2 + 28\dot{a}^2m^2]^{PF} = -d\tau F_{M Rad.}^{0 PF}, \quad (2.4.11)$$

$$d\vec{P}_{M Rad.}^{PF} = d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \frac{\vec{E}_{M Rad.}^{PF} \times \vec{H}_{M Rad.}^{PF}}{4\pi} = \\ (d\tau / 105) [98(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}})\dot{\vec{m}} - 42(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})\ddot{\vec{m}} - 68a^2(\vec{a} \cdot \vec{m})\dot{\vec{m}} - 10(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{m})^2\dot{\vec{a}} - \\ 14(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\ddot{\vec{m}} - 10(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{a} + 28(\dot{\vec{m}} \cdot \ddot{\vec{m}})\vec{a} - 14(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}})\dot{\vec{a}} + 30(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})a^2\vec{a} - 6m^2a^2\dot{\vec{a}} + \\ 30m^2(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{a} + 72(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})a^2\vec{m} + 4(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{m} + 56(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{m} - 12(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})a^2\vec{m}]^{PF} = -d\tau \vec{F}_{M Rad.}^{PF}. \quad (2.4.12)$$

თუ $\vec{m} = \text{const}$, მაშინ (2.4.11) და (2.4.12) მარტივდება:

$$dW_{M \text{ Rad.}}^{PF} \Big|_{m=\text{const}} = d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \frac{E_{M \text{ Rad.}}^{PF^2} + H_{M \text{ Rad.}}^{PF^2}}{8\pi} =$$

$$(d\tau / 105) \left[-14(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})^2 + 4a^2 (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 + 36a^4 m^2 + 28\dot{a}^2 m^2 \right]^{PF} = -d\tau F_{M \text{ Rad.}}^{0PF} \Big|_{m=\text{const}}, \quad (2.4.13)$$

$$d\vec{P}_{M \text{ Rad.}}^{PF} \Big|_{m=\text{const}} = d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \frac{\vec{E}_{M \text{ Rad.}}^{PF} \times \vec{H}_{M \text{ Rad.}}^{PF}}{4\pi} = -(d\tau / 105) \left[-10(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{a} + \right.$$

$$\left. 2(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \dot{\vec{a}} - 6m^2 a^2 \dot{\vec{a}} + 30m^2 (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{a} + 4(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{m} - 12(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})a^2 \vec{m} \right]^{PF} = -d\tau \vec{F}_{M \text{ Rad.}}^{PF} \Big|_{m=\text{const}}. \quad (2.4.14)$$

ენერგია-იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად, $F_{M \text{ Rad.}}^{iPF} = (F^0, \vec{F})^{PF}$ გამოსხივების მხრიდან ნაწილაკზე მოქმედი რეაქციის 4-ძალაა.

გადავწეროთ ეს გამოსახულებები კოვარიანტული სახით (აქ გამოყენებულია ფორმულები დამატებებიდან A, B და E). ცხადია, მიღებული შედეგი სამართლიანი იქნება ათვლის ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში:

$$F_{M \text{ Rad.}}^i = (1/105) \left\{ \left[35\text{Tr}(\dot{\mu}^2) - 140\dot{\omega}\mu^2\dot{\omega} - 7\text{Tr}(\mu^2)\dot{\omega}^2 - 63\text{Tr}(\dot{\mu}^2)\omega^2 + 42\text{Tr}(\mu\ddot{\mu})\omega^2 + 56\text{Tr}(\mu^2)\omega^4 - \right. \right.$$

$$\left. - 462\omega\dot{\mu}^2\omega - 462\omega\mu\dot{\omega} - 42\text{Tr}(\mu\dot{\mu})\omega\dot{\omega} + 168\omega\mu\ddot{\omega} - 42\omega\mu\dot{\omega} + 378(\omega\mu^2\omega)\omega^2 \right] u^i +$$

$$+ 3 \left[14\text{Tr}(\mu\ddot{\mu}) - 4\text{Tr}(\mu\dot{\mu})\omega^2 - 11\text{Tr}(\mu^2)\omega\dot{\omega} - 64\omega\mu\dot{\omega} - 36\omega\mu^2\dot{\omega} \right] \omega^i +$$

$$+ \left[14\text{Tr}(\mu\ddot{\mu}) + 29\text{Tr}(\mu^2)\omega^2 - 12\omega\mu^2\omega \right] \dot{\omega}^i - 98(\ddot{\mu}\omega)^i - 56(\dot{\mu}\omega)^i + 42(\mu\ddot{\omega})^i +$$

$$+ 14(\mu\dot{\omega})^i - 42\dot{\omega}\mu\omega(\mu\omega)^i + 114\omega^2(\mu\omega)^i - 96\omega^2(\mu\dot{\omega})^i - 68\omega^2(\mu^2\dot{\omega})^i + 60\omega\dot{\omega}(\mu^2\omega)^i \Big\}. \quad (2.4.15)$$

თუ $\vec{m} = \text{const}$, მაშინ

$$F_{M \text{ Rad.}}^i = (1/105) \left\{ \left[14(\dot{\omega}\mu^2\dot{\omega}) + 7\text{Tr}(\mu^2)\dot{\omega}^2 - 35\text{Tr}(\mu^2)\omega^4 + 2(\omega\mu^2\omega)\omega^2 \right] u^i - \right.$$

$$\left. 2 \left[4\text{Tr}(\mu^2)\omega^2 + (\omega\mu^2\omega) \right] \dot{\omega}^i + 2 \left[6\text{Tr}(\mu^2)\langle \omega\dot{\omega} \rangle + 5(\omega\mu^2\dot{\omega}) \right] \omega^i + 12\omega^2(\mu^2\dot{\omega})^i - 4\langle \omega\dot{\omega} \rangle(\mu^2\omega)^i \right\}. \quad (2.4.16)$$

b) მიღებული გამოსახულებები (2.4.15) – (2.4.16) (მსგავსად დამუხტული ნაწილაკისთვის მიღებული ძალისა (2.1.14)) არ აკმაყოფილებს (2.1.15) პირობას $F^i u_i = 0$, რომელსაც, თანახმად $u^k \omega_k = 0$ პირობისა, უნდა აკმაყოფილებდეს ნებისმიერი 4-ძალა. როგორც აღნიშნულია შრომებში [36], [37] მიღებული (2.4.15) – (2.4.16) რეაქციის ძალაში არ არის გათვალისწინებული გამოსხივებული ველების არარადიაციული კომპონენტები (R^{-2} და R^{-3} პროპორციული), რომლებიც აგრეთვე იწვევს უკუცემას და, მაშასადამე, შეაქვს წვლილი გამოსხივების რეაქციის ძალაში. იმ გამოსახულებათა რაოდენობა, რომელსაც შეიძლება შეიცავდეს RR ძალა ტოლია 42-ის: $\text{Tr}(\mu\ddot{\mu})u^i$ და კიდევ 41 გამოსახულება,

რომელიც მოცემულია დამატება E-ში (ფ-ები (E.1) – (E.4)). შევნიშნოთ, რომ დამუხტული ნაწილაკის შემთხვევაში არსებობს მხოლოდ ორი გამოსახულება რეაქციის ძალისთვის (იხ. შენიშვნა. 1) და არსებობს მათი ერთადერთი კომბინაცია (2.1.16), რომელიც აკმაყოფილებს (2.1.15) პირობას – $F^i u_i = 0$.

ამ პირობის შესასრულებლად ნაწილაკის მყისიერ მიმყოფ ინერციულ (საკუთარ) ათვლის სისტემაში ძალის დროითი (ნულოვანი) კომპონენტა უნდა იყოს ნულის ტოლი. 42 გამოსახულებიდან მხოლოდ ერთი – $\text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) u^i$ – შეიცავს $\lim_{\nu \rightarrow 0} (\vec{a} \cdot \vec{\nu})^2 / \nu^2$ ტიპის გამოსახულებებს, რომლებიც არ აკმაყოფილებს საჭირო პირობას. ამიტომ $\text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) u^i$ ვერ შევა ძალის გამოსახულებაში.

42 გამოსახულებიდან რჩება 41, რომელიც შეიძლება შევიდეს რეაქციის ძალაში ნებისმიერი კოეფიციენტებით. (2.1.15) მოთხოვნა ადებს ამ კოეფიციენტებს 14 პირობას. მართლაც, (2.1.15) მოთხოვნის შესასრულებლად, როგორც უკვე აღინიშნა, ძალის ნულოვანი კომპონენტა PF-ში უნდა იყოს ნულის ტოლი (დამატება E-ში, ფ-ები (E.8) – (E.9), ამოწერილია ის 14 გამოსახულება, რომელიც შეიძლება შედიოდეს ძალის ნულოვან კომპონენტაში PF-ში). შედეგად, ძალის უზოგადეს გამოსახულებაში რჩება 27 თავისუფალი კოეფიციენტი:

$$F_m^i = (1/105) \left[A_1 u^i + A_2 \omega^i + A_3 \dot{\omega}^i + c_1 \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \dot{\omega}^i + c_{10} \text{Tr}(\mu^2) \ddot{\omega}^i + c_2 (\dot{\mu} \dot{\mu} \omega)^i + c_3 (\ddot{\mu} \mu \omega)^i + c_4 (\dot{\mu} \dot{\mu} \dot{\omega})^i + c_5 (\dot{\mu} \mu \ddot{\omega})^i + c_{11} (\ddot{\mu} \mu \omega)^i + c_{12} (\ddot{\mu} \mu \dot{\omega})^i + (-c_{13} + c_6) \omega^2 (\dot{\mu} \mu \omega)^i + c_{19} \langle \omega \dot{\omega} \rangle (\mu^2 \omega)^i + c_{20} \omega^2 (\mu \dot{\mu} \omega)^i + c_{21} \omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})^i + c_{22} (\mu \ddot{\mu} \omega)^i + c_{23} (\dot{\mu} \dot{\mu} \dot{\omega})^i + c_{25} (\mu \ddot{\mu} \omega)^i + c_{26} (\mu^2 \ddot{\omega})^i + c_{27} (\mu \dot{\mu} \ddot{\omega})^i \right]; \quad (2.4.17)$$

აქ აღნიშნულია

$$A_1 = 3c_1 \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) (\omega \dot{\omega}) + c_2 (\omega \mu \dot{\mu} \omega) + c_3 \left[3(\omega \mu \ddot{\mu} \omega) + 3(\omega \mu \dot{\mu} \dot{\omega}) + (\omega \mu^2 \ddot{\omega}) \right] + c_4 (\omega \mu \dot{\mu} \dot{\omega}) + c_5 (\omega \mu^2 \ddot{\omega}) + c_6 (\omega \mu^2 \omega) \omega^2 + c_7 \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 + c_8 \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 + c_9 \text{Tr}(\mu^2) \omega^4 + c_{10} \left[4 \text{Tr}(\mu^2) \langle \omega \dot{\omega} \rangle + 3 \text{Tr}(\mu^2) \dot{\omega}^2 \right] + c_{11} \left[2(\omega \mu^2 \omega) + (\omega \mu \mu \dot{\omega}) \right] + c_{12} \left[2(\omega \mu \mu \dot{\omega}) + (\dot{\omega} \mu^2 \dot{\omega}) \right], \quad (2.4.18)$$

$$A_2 = c_{14} \text{Tr}(\mu^2) \langle \omega \dot{\omega} \rangle + c_{15} \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 + c_{16} (\omega \mu \dot{\mu} \omega) + c_{17} \text{Tr}(\dot{\mu} \ddot{\mu}) + c_{18} (\omega \mu^2 \dot{\omega}) + c_{24} \text{Tr}(\mu \ddot{\mu}), \quad (2.4.19)$$

$$A_3 = c_7 \text{Tr}(\dot{\mu}^2) + c_8 \text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) + c_9 \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 + c_{13} (\omega \mu^2 \omega). \quad (2.4.20)$$

(2.4.17) ძალაში შემავალი აჩქარების მეორე და მესამე წარმოებულების შემცველი წევრები ზრდის მოძრაობის განტოლების რიგს. ამ ძალის PF-ში გადაწერა ((E.8) – (E.15))

ფორმულების გამოყენებით) გვიჩვენებს, რომ მაღალი წარმოებულების გამოსარიცხავად საკმარისია მივიჩნიოთ, რომ (2.4.17) ფორმულაში

$$c_{26} = -2c_{10}, \quad c_{27} = -2c_1 - c_5.$$

ც) დავუშვათ, $\vec{m} = \text{const}$ PF-ში. მაშინ (2.4.17)-ში შემავალი ზოგიერთი გამოსახულება ერთმანეთზე წრფივად დამოკიდებული ხდება, ზოგიერთი კი ხდება იგივეურად ნულის ტოლი. საბოლოოდ რჩება 16 წრფივად დამოუკიდებელი გამოსახულება: $\text{Tr}(\mu \ddot{\mu})u^i$ და კიდევ 15 გამოსახულება, რომლებიც ამოწერილია (E.6)-ში. $\text{Tr}(\mu \ddot{\mu})u^i$ წევრი არ შევა ძალის გამოსახულებაში *ბ*) პუნქტში დასახელებული მიზეზის გამო, რჩება 15 წრფივად დამოუკიდებელი გამოსახულება და, მაშასადამე, 15 განუსაზღვრელი კოეფიციენტი RR ძალის უზოგადეს სახეში.

$F^i u_i = 0$ პირობის შესასრულებლად საჭიროა ამ კოეფიციენტებს დაედოს 6 პირობა, რადგან ძალის ნულოვანი კომპონენტა შეიძლება შეიცავდეს 6 სხვადასხვა გამოსახულებას (იხ. ფორმულა (E.8)). საბოლოოდ, $\vec{m} = \text{const}$ შემთხვევაში RR ძალის გამოსახულებაში რჩება 9 თავისუფალი კოეფიციენტი:

$$\begin{aligned} F_M^i \Big|_{m=\text{const}} = (1/105) \{ & [k_1 \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 + k_2 (\omega \mu^2 \omega)] \dot{\omega}^i + [k_1 \text{Tr}(\mu^2) \omega^4 + k_2 (\omega \mu^2 \omega) \omega^2 + \\ & 3k_3 \text{Tr}(\mu^2) \dot{\omega}^2 + 4k_3 \text{Tr}(\mu^2) \langle \omega \ddot{\omega} \rangle] u^i + k_4 (\dot{\omega} \mu \omega) (\mu \omega)^i + k_5 \omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})^i + k_3 \text{Tr}(\mu^2) \ddot{\omega}^i + \\ & k_9 (\mu^2 \ddot{\omega})^i + k_6 \langle \omega \dot{\omega} \rangle (\mu^2 \omega)^i + [k_7 \text{Tr}(\mu^2) \langle \omega \dot{\omega} \rangle + k_8 (\omega \mu^2 \dot{\omega})] \omega^i \}. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

ნაწილაკის PF – ში ამ ძალისთვის მივიღებთ:

$$F_M^{iPF} \Big|_{m=\text{const}} = (F_M^{0PF} \Big|_{m=\text{const}}, \vec{F}_M^{PF} \Big|_{m=\text{const}}),$$

სადაც

$$F_M^{0PF} \Big|_{m=\text{const}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_m^{PF} \Big|_{m=\text{const}} = (1/105) [& (2k_1 + k_2 - 20k_3 + k_5 - 10k_9) m^2 a^2 \dot{\vec{a}} - a^2 (k_5 - 10k_9) (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{m} - \\ & (k_6 - 15k_9) (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{m} + (-30k_3 + k_6 + 2k_7 + k_8 - 15k_9) (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) m^2 \vec{a} - \\ & (2k_3 + k_9) m^2 \ddot{\vec{a}} - k_2 (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \dot{\vec{a}} - k_4 (\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m})) (\vec{a} \times \vec{m}) - k_8 (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{a} + k_9 (\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{m}]. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

(2.4.22) გამოსახულებაში აჩქარების მეორე და მესამე რიგის წარმოებულები რომ გაქრეს, აუცილებელია და საკმარისი ავირჩიოთ

$$k_3 = k_9 = 0.$$

საბოლოოდ:

$$F_M^i \Big|_{m=\text{const}} = (1/105) \left\{ \left[k_1 \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 + k_2 (\omega \mu^2 \omega) \right] \dot{\omega}^i + \left[k_1 \text{Tr}(\mu^2) \omega^4 + k_2 (\omega \mu^2 \omega) \omega^2 \right] u^i + \right. \\ \left. k_5 \omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})^i + k_6 (\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)^i + k_4 (\dot{\omega} \mu \omega) (\mu \omega)^i + \left[k_7 \text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) + k_8 (\omega \mu^2 \dot{\omega}) \right] \omega^i \right\} \quad (2.4.23)$$

ნაწილაკის საკუთარ ათვლის სისტემაში ამ ძალის კომპონენტებია:

$$F_M^{iPF} \Big|_{m=\text{const}} = \left(F_M^{0PF} \Big|_{m=\text{const}}, \vec{F}_M^{PF} \Big|_{m=\text{const}} \right), \quad (2.4.24)$$

სადაც

$$F_M^{0PF} \Big|_{m=\text{const}} = 0, \\ \vec{F}_m^{PF} \Big|_{m=\text{const}} = (1/105) \left[(2k_1 + k_2 + k_5) m^2 a^2 \dot{\vec{a}} - a^2 k_5 (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{m} - k_6 (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{m} + \right. \\ \left. (k_6 + 2k_7 + k_8) (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) m^2 \vec{a} - k_2 (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \dot{\vec{a}} - k_4 (\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m})) (\vec{a} \times \vec{m}) - k_8 (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{a} \right]. \quad (2.4.25)$$

2.5. მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის რადიაციული ნაწილი და შესაბამისი რეაქციის ძალა.

a) განვიხილოთ e მუხტისა და $\vec{m}$ მაგნიტური მომენტის (საკუთარ ათვლის სისტემაში) მქონე ნაწილაკი. მის მიერ შექმნილი ველებია

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_e(\vec{x}, t) + \vec{E}_M(\vec{x}, t), \quad \vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{H}_e(\vec{x}, t) + \vec{H}_M(\vec{x}, t) \quad (2.5.1)$$

წინა პუნქტების მსგავსად, განვიხილოთ ამ ველების რადიაციული ნაწილი იმ ნაწილაკის მყისად თანამდევ ინერციულ ათვლის სისტემაში ამ ველების გამოსხივების t' მომენტში. ადვილია ჩვენება [36], [37], რომ (2.1.10) და (2.4.10) თანაფარდობების მსგავსად, ამ ელექტრომაგნიტური ველის ორივე ლორენც – ინვარიანტი ნულის ტოლია:

$$E_{Rad.}^{PF\ 2} - H_{Rad.}^{PF\ 2} = 0, \quad \left(\vec{E}_{Rad.}^{PF} \cdot \vec{H}_{Rad.}^{PF} \right)^2 = 0. \quad (2.5.2)$$

შესაბამისი ენერგიის სიმკვრივე

$$\frac{E_{Rad.}^{PF\ 2} + H_{Rad.}^{PF\ 2}}{8\pi} = \frac{E_{eRad.}^{PF\ 2} + H_{eRad.}^{PF\ 2}}{8\pi} + \frac{E_{M\ Rad.}^{PF\ 2} + H_{M\ Rad.}^{PF\ 2}}{8\pi} + \frac{\vec{E}_{eRad.}^{PF} \cdot \vec{E}_{M\ Rad.}^{PF} + \vec{H}_{eRad.}^{PF} \cdot \vec{H}_{M\ Rad.}^{PF}}{4\pi}. \quad (2.5.3)$$

შრომებში [36], [37] გამოთვლილია R რადიუსის სფეროში $d\tau$ დროში გასული ენერგია და იმპულსი, ანუ მუხტის მიერ $d\tau$ დროში გამოსხივებული ენერგია და იმპულსი (მუხტი R რადიუსის სფეროს ცენტრშია $\vec{E}$ და $\vec{H}$ ველების გამოსხივების მომენტში). (2.5.3)-ის პირველი ორი შესაკრების ინტეგრალი მოცემულია (2.1.11) და (2.4.11) ფორმულებით, ხოლო ბოლო შესაკრების შესაბამისი ენერგიისთვის ვპოულობთ [36]:

$$dW_{Rad.}^{PF} = R^2 d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{\vec{E}_{eRad.}^{PF} \cdot \vec{E}_{M Rad.}^{PF} + \vec{H}_{eRad.}^{PF} \cdot \vec{H}_{M Rad.}^{PF}}{4\pi} = \frac{2}{3} e \vec{m} \cdot (\vec{a} \times \dot{\vec{a}}) = -d\tau F_{cross Rad.}^{0 PF}. \quad (2.5.4)$$

შრომებში [36], [37] ნაპოვნია სრული ველის იმპულსის სიმკვრივე. ცხადია,

$$\vec{E}_{Rad.}^{PF} \times \vec{H}_{Rad.}^{PF} = \vec{E}_{eRad.}^{PF} \times \vec{H}_{eRad.}^{PF} + \vec{E}_{M Rad.}^{PF} \times \vec{H}_{M Rad.}^{PF} + \vec{E}_{eRad.}^{PF} \times \vec{H}_{M Rad.}^{PF} + \vec{E}_{M Rad.}^{PF} \times \vec{H}_{eRad.}^{PF}. \quad (2.5.5)$$

პირველი ორი შესაკრების შესაბამისი ინტეგრალები მოცემულია (2.1.12) და (2.4.12) ფორმულებით, დანარჩენი ორი შესაკრების შესაბამისი იმპულსისთვის, რომელიც გადის R რადიუსის სფეროში $d\tau$ დროში გვექნება [36], [37]:

$$d\vec{P}_{M Rad.}^{PF} = d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \left(\frac{\vec{E}_{eRad.}^{PF} \times \vec{H}_{M Rad.}^{PF}}{4\pi} + \frac{\vec{E}_{M Rad.}^{PF} \times \vec{H}_{eRad.}^{PF}}{4\pi} \right) = \frac{2}{3} e \vec{a} \times \ddot{\vec{m}} = -d\tau \vec{F}_{Cross Rad.}^{PF}. \quad (2.5.6)$$

გადავწეროთ $F_{Cross}^{i PF}$ კოვარიანტული სახით, (E.8) – (E.15) ფორმულების თანახმად,

$$F_{cross Rad}^i = (-2/3) e \left((\ddot{m})^i + \omega^2 (\mu\omega)^i - 2u^i (\omega\mu\dot{\omega}) \right). \quad (2.5.7)$$

თუ $\vec{m} = \text{const}$, მაშინ

$$F_{cross Rad}^i \Big|_{m=\text{const}} = (2/3) e u^i (\omega\mu\dot{\omega}). \quad (2.5.8)$$

b) როგორც წინა შემთხვევებშიც, (2.5.7) და (2.5.8) გამოსახულებები არ აკმაყოფილებს (2.1.15) პირობას. (E.5), (E.16), (E.17) ფორმულების თანახმად, უზოგადესი გამოსახულება $F_{cross Rad}^{i PF}$ ძალისთვის, რომელიც დააკმაყოფილებს ამ პირობას, შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად [36]:

$$F_{cross Rad}^i = (2/3) e \left(f_1 (\omega\mu\dot{\omega}) u^i + f_2 \omega^2 (\mu\omega)^i + f_3 (\ddot{m})^i + (f_1 + f_3) (\dot{m})^i \right), \quad (2.5.9)$$

სადაც f_1 , f_2 და f_3 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

თუ $\vec{m} = \text{const}$, მაშინ

$$F_{cross}^i \Big|_{m=\text{const}} = (2/3) e h_1 \left((\omega\mu\dot{\omega}) u^i - (\ddot{m})^i \right), \quad (2.5.10)$$

სადაც h_1 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია.

c) საბოლოოდ მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკზე მოქმედი RR ძალა უზოგადეს შემთხვევაში ტოლია (2.1.16), (2.4.17) (სადაც $c_{26} = -2c_{10}$, $c_{27} = -2c_1 - c_5$) და (2.5.9) გამოსახულებების ჯამისა.

$\vec{m} = \text{const}$ შემთხვევაში, (2.1.16), (2.4.23) და (2.5.10) – ის თანახმად:

$$\begin{aligned}
F^i \Big|_{m=\text{const}} &= (2/3) e^2 (\ddot{u}^i - u^i u^k \ddot{u}_k) + (2/3) e h_1 ((\omega \mu \dot{\omega}) u^i - (\ddot{\mu} \omega)^i) + \\
&+ (1/105) \left[\dot{\omega}^i (k_1 \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 + k_2 \omega \mu^2 \omega) + u^i (k_1 \text{Tr}(\mu^2) \omega^4 + k_2 (\omega \mu^2 \omega) \omega^2) + \right. \\
&\left. + k_4 (\dot{\omega} \mu \omega) (\mu \omega)^i + k_5 \omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})^i + k_6 (\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)^i + \omega^i (k_7 \text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) + k_8 (\omega \mu^2 \dot{\omega})) \right].
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

(2.5.11) ძალის კომპონენტები PF – ში გამოთვლილია შრომებში [36], [37]

$$F^{iPF} \Big|_{m=\text{const}} = \left(F^{0PF} \Big|_{m=\text{const}}, \vec{F}^{PF} \Big|_{m=\text{const}} \right), \tag{2.5.12}$$

სადაც

$$F^{0PF} \Big|_{m=\text{const}} = 0, \tag{2.5.13}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{PF} \Big|_{m=\text{const}} &= (2/3) e^2 \dot{\vec{a}} - (2/3) h_1 e a^2 (\vec{a} \times \vec{m}) + (1/105) \left[\dot{\vec{a}} \left((2k_1 + k_2 + k_5) a^2 m^2 - k_2 (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \right) + \right. \\
&+ \vec{a} \left((k_6 + 2k_7 + k_8) (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) m^2 - k_8 (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \right) - \\
&\left. - \left(k_5 a^2 (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) + k_6 (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) (\vec{a} \cdot \vec{m}) \right) \vec{m} - k_4 \left(\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m}) \right) (\vec{a} \times \vec{m}) \right].
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

2.6. გამოსხივების რეაქციის ძალა წრფივი და წრიული მოძრაობის შემთხვევაში.

შრომებში [36], [37] ჩვენს მიერ განხილულია ნაწილაკზე მოქმედი გამოსხივების რეაქციის ძალის ორი მნიშვნელოვანი მაგალითი და შესრულებულია ზოგიერთი რიცხვითი შეფასება:

მაგალითი 1. გამოსხივების რეაქციის ძალა ნაწილაკის წრფივი მოძრაობისას. ვთქვათ, ნაწილაკის მაგნიტური მომენტი $\vec{m}$ მიმართულია მოძრაობის წრფის გასწვრივ. მაშინ $\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{m}) v^{-2} = \vec{m}$ და, თანახმად (2.2.4) ფორმულისა, გვაქვს

$$\vec{m}(\vec{v}) = \gamma \vec{m} + (1 - \gamma) \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{m}) v^{-2} = \vec{m}. \tag{2.6.1}$$

ცხადია, წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში ნაწილაკის $\vec{a}$ აჩქარებაც და $\dot{\vec{a}}$ აჩქარების წარმოებულიც საკუთარი დროით ასევე მიმართული უნდა იყოს მოძრაობის წრფის გასწვრივ.

(2.5.13) და (2.5.14) ფორმულების თანახმად, RR ძალა ნაწილაკის PF-ში:

$$F^{iPF} = (2/3) \dot{a} (e^2 + k m^2 a^2) (0, \hat{x}), \tag{2.6.2}$$

სადაც $\hat{x}$ აღნიშნავს ერთეულოვან 3 – ვექტორს მოძრაობის წრფის გასწვრივ – Ox ღერძის მიმართულებას, ხოლო k განუსაზღვრელი ნამდვილი მუდმივია, რომელიც დაკავშირებულია მუდმივებთან (2.5.14) ფორმულაში თანაფარდობით

$$k = (1/35)(k_1 + k_7). \tag{2.6.3}$$

ლაბორატორიულ ათვის სისტემაში, სადაც ნაწილაკი მოძრაობს მოცემული $\vec{v}$ სიჩქარით, გვექნება:

$$F^i = (2/3)(e^2 + km^2 a^2 \gamma^6 c^{-6})(a' + 3a^2 v \gamma^2 c^{-2}) \gamma^5 c^{-3} (\nu/c, \hat{v}). \quad (2.6.4)$$

აქ $c = 3 \cdot 10^{10}$ სმ/წმ – სინათლის სიჩქარეა ვაკუუმში (ტრადიციულ აღნიშვნებს დავუბრუნდით რიცხვითი შეფასებების გასამარტივებლად); $\hat{v} = \vec{v}/v$ აღნიშნავს ერთეულოვან 3-ვექტორს მოძრაობის მიმართულებით; $a' = da/dt'$, t' არის ლაბორატორიული დრო.

თანახმად (2.6.4) თანაფარდობისა, მამრავლი

$$e^2 + km^2 a^2 \gamma^6 c^{-6} \equiv (e^*)^2 \quad (2.6.5)$$

წარმოადგენს „ეფექტურ მუხტს“ განსახილველი ამოცანისთვის. ამრიგად, მაგნიტურ მომენტთან დაკავშირებული მოვლენები გასათვალისწინებელი გახდება, როდესაც შესაკრებები „ეფექტურ მუხტში“ (2.6.5) ერთნაირი რიგისა იქნება. ნაშრომში [37] შესრულებულია შესაბამისი შეფასებები. კერძოდ, თუ ჩავთვლით, რომ განუსაზღვრელი კოეფიციენტი k (2.6.5) ფორმულაში არის 1 რიგის, მივიღებთ შესაბამის კრიტერიუმს:

$$(m/e)^2 a^2 \gamma^6 c^{-6} \sim 1,$$

საიდანაც

$$a \gamma^3 \sim c^3 e / |\vec{m}|. \quad (2.6.6)$$

ელექტრონისთვის (2.6.6) გვაძლევს (აქ ყველა სიდიდე SI სისტემაში):

$$\gamma \simeq 10^{10} a^{-1/3}, \quad \mathcal{E}_e = \gamma m_e c^2 \simeq 10^{10} a^{-1/3} m_e c^2.$$

შეფასებისთვის ჩავთვალოთ, რომ აჩქარება $a \sim (1-10^3)$ მ/წმ² (ასტროფიზიკური ობიექტებისთვის დამახასიათებელი მნიშვნელობა). მივიღებთ შეფასებას ენერგიისთვის ლაბორატორიულ სისტემაში

$$\mathcal{E}_e \simeq (10^{15} - 10^{16}) eV = (10^3 - 10^8) TeV.$$

ასეთი ენერგიები ჯერ მიუღწეველია ამაჩქარებლებისთვის, მაგრამ რეალურია [40 a, b] კოსმოსური სხივებისთვის.

შევნიშნოთ, რომ კინემატიკური კოეფიციენტი (2.6.4) ფორმულაში

$$a' + 3a^2 v \gamma^2 c^{-2}$$

ისეთივეა, როგორც მაგნიტური მომენტის არმქონე წერტილოვანი მუხტისთვის, ანუ მაგნიტური მომენტის მხედველობაში მიღებამ შეცვალა მხოლოდ „ეფექტური მუხტი“ (2.6.5). აქედან გამომდინარეობს, რომ მაგნიტური მომენტის გათვალისწინება არ ხსნის ე.წ.

ჰიპერბოლური მოძრაობის პარადოქსს (იხ. თავი 4), როდესაც გამოსხივების არსებობის მიუხედავად, გამოსხივების რეაქციის ძალა ნულის ტოლია.

ნაშრომებში [36], [37] შესწავლილია კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი:

მაგალითი 2. წრეწირზე მუდმივი სიჩქარით მოძრაობა ((იგულისხმება, რომ ნაწილაკის მაგნიტური მომენტი $\vec{m}$ და მაშასადამე $\vec{m}(\vec{v})$ (იხ. (2.2.4)) მიმართულია ტრაექტორიის მართობულად, ხოლო m $\vec{m}$ -ის გეგმილია $\vec{a} \times \vec{v}$ -ს მიმართულებაზე). დამატება F-ის თანახმად, ამ შემთხვევაში ნაწილაკზე მოქმედი RR ძალა გამოისახება ფორმულით:

$$F^i = -\frac{2}{3} \left[e^2 - h_1 e m \frac{\gamma^2 v^3}{c r} + K m^2 \frac{\gamma^4 v^4}{c^2 r^2} \right] \frac{\gamma^4 v^3}{r^2 c^3} \left\{ \frac{v}{c}, \hat{v} \right\}, \quad (2.6.7)$$

სადაც

$$K = \frac{2k_1 + k_2 - k_4 + k_5}{70}, \quad (2.6.8)$$

და, მსგავსად წინა მაგალითისა, შეგვიძლია შემოვიღოთ „ეფექტური მუხტი“

$$e^2 - h_1 e |\vec{m}| \frac{\gamma^2 v^3}{c r} + K |\vec{m}|^2 \frac{\gamma^4 v^4}{c^2 r^2} = (\tilde{e}^*)^2. \quad (2.6.9)$$

შრომაში [37] გაკეთებულია შეფასებები ენერგიებისა, რომელთა მიღწევის შემდეგ მნიშვნელოვანი ხდება მაგნიტურ მომენტთან დაკავშირებული წვლილის გათვალისწინება გამოსხივების რეაქციის ძალაში. კერძოდ, თუ ავიღებთ ელექტრონის ორბიტის რადიუსს $R \approx 10^3$ მ, მივიღებთ:

$$\gamma_e \approx 7 \cdot 10^7 \Rightarrow \mathcal{E} \sim 3 \cdot 10^{13} \text{ eV} \sim 10 \text{ TeV}.$$

ეს ენერგია მხოლოდ მცირედ ჩამორჩება თანამედროვე ციკლურ ამაჩქარებლებზე ელექტრონებისთვის მიღწეულს. ამდენად, ჩვენს მიერ მიღებული შეფასებები, ისევე, როგორც დისერტაციაში გამოყენებული საერთო მიდგომა, მოსალოდნელია, აქტუალური გახდება ახლო მომავალში, უკვე მომდევნო თაობის ამაჩქარებლების დაპროექტებისას. გარდა ამისა, ჩვენი შედეგების გათვალისწინება საინტერესოა ზოგიერთი ასტროფიზიკური ობიექტის თანამედროვე კვლევებში. მაგალითად, არსებობს შეფასებები [40 a, b], რომ კიბორჩხალას ნისლეულში ელექტრონ-პოზიტრონებისთვის $\gamma_e \approx 10^6 - 10^9$.

თავი 2-ის ძირითადი შედეგები

1. გამოთვლილია მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალი და ველის ტენზორი, ნებისმიერად მოძრავი ნაწილაკისთვის. შედეგი წარმოდგენილია როგორც კოვარიანტული (ოთხ-განზომილებიანი) ფორმით, ასევე სამგანზომილებიანი ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობების გამოყენებით.

2. გამოყვანილია ფორმულა ჩვენ მიერ მიღებული ელექტრომაგნიტური ველის შესაბამისი მაგნიტური დენის სიმკვრივისთვის. ნაჩვენებია, რომ შესაბამისი ინტეგრალური მაგნიტური მუხტი ნულის ტოლია.

3. რადიაციული ველების განხილვის საფუძველზე ნაპოვნია მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე მუხტისმიერად მოძრავი ნაწილაკის მიერ გამოსხივებული ენერგიის სიმკვრივე, ნაკადი და შესაბამისი ინტეგრალური სიდიდეები.

4. გამოთვლილია გამოსხივების რეაქციის ძალა, რომელიც მოქმედებს მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე მუხტისმიერად მოძრავ ნაწილაკზე. გამოთვლები შესრულებულია ასიმპტოტურ არეში, დიდი მანძილებისთვის, ხოლო ველების არარადიაციული ნაწილის მოქმედების გასათვალისწინებლად გამოყენებულია ზოგადი მოსაზრებები – 4-ძალისა და 4-სიჩქარის ორთოგონალობა (ნიუტონის II კანონი), ლორენც-კოვარიანტობისა და განზომილებათა თეორიის მოთხოვნები.

5. ნაჩვენებია, რომ მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევებში (წრფივი მოძრაობა; წრეწირზე მუდმივი სიჩქარით მოძრაობა) მაგნიტური მომენტის გათვალისწინება არ ხსნის ჰიპერბოლური მოძრაობის პრობლემას. რამდენადაც გამოსხივების რეაქციის ძალა (2.7.12) დამოკიდებულია ნაწილაკის აჩქარების წარმოებულზე დროით (კოორდინატის მესამე წარმოებულზე), არ მოიხსნა თვითაჩქარების პრობლემაც.

6. ნაჩვენებია, რომ მაღალ ენერგიებზე მაგნიტურ მომენტთან დაკავშირებული გამოსხივების რეაქციის ძალა უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე მუხტთან დაკავშირებული, რაც მნიშვნელოვანია ამჩქარებლებში ნაწილაკების აჩქარების ოპტიმალური რეჟიმის ასარჩევად, აგრეთვე სინქროტრონული გამოსხივების გასაანგარიშებლად.

თავი 3. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის რეჟიმი, რომელსაც შეესაბამება გამოსხივების რეაქციის ნულოვანი ძალა

დისერტაციის ამ თავში ნაჩვენებია, რომ არსებობს წერტილოვანი მუხტის მოძრაობის ერთადერთი რეჟიმი, რომლის დროსაც გამოსხივების რეაქციის ძალა ნულია. ცხადი სახით ნაპოვნია ასეთი მოძრაობის კანონი, ტრაექტორია და გარეშე ელექტრომაგნიტური ველების ისეთი კონფიგურაცია, რომელიც ასეთ მოძრაობას განაპირობებს.

დამტკიცებულია, რომ არსებობს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, რომელშიც ნულოვანი რეაქციის ძალით მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის ტრაექტორია წრფივია და, ამასთან, ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე ნულია. ცხადი სახით ნაპოვნია ამ ათვლის სისტემაში გადასვლისთვის საჭირო ლორენცის გარდაქმნის პარამეტრი (სიჩქარე).

ბევრი ავტორი (იხ., მაგ., მიმოხილვები [26], [19] და იქ ციტირებული წყაროები) განმარტავს თანაბარაჩქარებულ რელატივისტურ მოძრაობას ბრტყელ სივრცე-დროში პირობით

$$d^2u_k/d\tau^2 = \dot{\omega}_k = 0$$

და უკავშირებს გამოსხივების რეაქციის ძალის გაქრობას ამ პირობას. წინამდებარე თავის პირველ ქვეთავში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ პირობა (3.1.1) შეესაბამება თანაბარ (და არა თანაბარაჩქარებულ) მოძრაობას და, ამრიგად, რეაქციის ძალის გაქრობა მოძრაობის ამ რეჟიმში გამოწვეულია თვით გამოსხივების არარსებობით. ამასთან, ამავე 3.1 ქვეთავში ნაჩვენებია, რომ არსებობს კიდევ ერთი რეჟიმი, როცა გამოსხივების რეაქციის ძალა $= 0$. მოძრაობის ამ რეჟიმს მ. ბორნმა [24] უწოდა *ჰიპერბოლური მოძრაობა*. (1909; სწორედ ეს მოძრაობაა „რელატივისტურად თანაბარაჩქარებული“). 3.1 ქვეთავში ამოხსნილია შესაბამისი მოძრაობის განტოლება და გამოყვანილია ამ მოძრაობის კანონი ზოგად შემთხვევაში. ნაჩვენებია, რომ ეს რეჟიმი ერთადერთია. შემოთავაზებულია რამდენიმე სასარგებლო მათემატიკური თანაფარდობა მოძრაობის ასეთ რეჟიმში გამოთვლების შესასრულებლად. მეორე ქვეთავში ცხადი სახით ნაპოვნია ტრაექტორიის განტოლება და ნაჩვენებია, რომ ზოგად შემთხვევაში ეს არის ჰიპერბოლა. ნაჩვენებია, რომ არსებობს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, რომელშიც ეს ტრაექტორია წარმოადგენს წრფეს, ამასთან, მუხტის საწყისი სიჩქარე ამ სისტემაში ნულია. ცხადი სახით ნაპოვნია ათვლის ასეთ სისტემაში ლაბორატორიული სისტემიდან ლორენცის გარდაქმნის პარამეტრი. მესამე ქვეთავში ნაპოვნია გარეშე ელექტრომაგნიტური ველების ის უზოგადესი

კონფიგურაცია, რომელიც უზრუნველყოფს მუხტის მოძრაობას გამოსხივების რეაქციის გარეშე. ნაჩვენებია, რომ ეს ველი არის ერთგვაროვანი სტატიკური ელექტრული და მაგნიტური ველების გარკვეული კომბინაცია და ნაპოვნია მისი ცხადი სახე. მელოზე ქვეთავში შესრულებულია შედარება მხოლოდ ელექტროსტატიკურ ერთგვაროვან ველში მოძრაობასთან. ნაჩვენებია, რომ ზოგად შემთხვევაში გამოსხივების რეაქციის ძალა ასეთი მოძრაობისას არანულოვანია. ცხადია, ასეთი მოძრაობის ზუსტი აღწერისთვის საჭიროა მესამე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა, რაც ზოგადი სახის საწყისი პირობების შემთხვევაში მიახლოებითი (რიცხვითი ან ანალიზური) მეთოდების გამოყენებას მოითხოვს.

ჰიპერბოლური მოძრაობის შესწავლა, გარდა ფუნდამენტური პრობლემებისა, უკავშირდება მრავალ გამოყენებით ამოცანასაც: მოსალოდნელია, რომ ჰიპერბოლური რეჟიმიდან მცირე გადახრები გამოიწვევს მცირე ცვლილებებს გამოსხივების რეაქციის ძალაში. ამ დებულების მკაცრი მათემატიკური დამტკიცება საინტერესო უნდა იყოს მათემატიკური თვალსაზრისითაც. შესაბამისად, შეიძლება დაისვას შებრუნებული ამოცანაც – როგორი მოძრაობისთვის იქნება გამოსხივების რეაქციის ძალა მაქსიმალური? მოსალოდნელია, რომ მოძრაობის ასეთ რეჟიმში მაქსიმალური იქნება გამოსხივების სიმძლავრე. ამდენად, შესაბამისი რეჟიმის პოვნას და შესწავლას დიდი მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს, კერძოდ, სინქროტრონული გამოსხივების პრობლემატიკისთვის.

3.1. მოძრაობის კანონი

a) მოვითხოვთ, რომ LAD ძალა იყოს ნულის ტოლი:

$$F_e^i = (2/3)e^2 (g^{ik} - u^i u^k) d^2 u_k / d\tau^2 = 0. \quad (3.1.1)$$

$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

განტოლებათა სისტემა (3.1.1) წრფივია $d^2 u_k / d\tau^2 = \dot{\omega}_k$ წარმოებულების მიმართ და, ცხადია, აქვს ტრივიალური (ფორმალური) ამონახსნი

$$\dot{\omega}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.1.2)$$

თუ გავითვალისწინებთ ცნობილ თანაფარდობებს (იხ., მაგ., [7], §7)

$$u^k u_k = 1 \quad \Rightarrow \quad u^k \omega_k = 0, \quad (3.1.3)$$

მივიღებთ

$$\omega^k \omega_k = -u^k \dot{\omega}_k, \quad (3.1.4)$$

რაც, (3.1.2) გათვალისწინებით, გვაძლევს პირობას

$$\omega^2 = 0, \quad \omega_0^{(0)} = \pm |\vec{\omega}^{(0)}|. \quad (3.1.5)$$

ცნობილია, რომ 4-აჩქარება ω^k არის სივრცისმაგვარი ვექტორი (იხ., მაგ., [7] §7):

$$\omega_0 = \gamma^4 \vec{a} \cdot \vec{v}, \quad \vec{\omega} = \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}; \quad \omega^2 = -\gamma^4 (\vec{a}^2 + \gamma^2 (\vec{a} \cdot \vec{v})^2) = -a_0^2 \leq 0 \quad (3.1.6)$$

(აქ, ისივე, როგორც დისერტაციის წინა თავებში, $\vec{v}$ ნაწილაკის მოძრაობის 3-სიჩქარეა; $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ აღნიშნავს ლორენც-ფაქტორს; $\vec{a}$ აღნიშნავს 3-აჩქარებას; a_0 აჩქარების 3-ვექტორის მოდულია ნაწილაკის საკუთარ (მყისიერ მიმყოფ) ათვლის სისტემაში. პირველ თავში საკუთარ სისტემაში სიდიდეებს აღვნიშნავდით შემდეგნაირად – $a|_{PF}$).

ამდენად, პირობები (3.1.4) – (3.1.6) გვაძლევს

$$\dot{\omega}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}_0 = 0,$$

და უნდა დავასკვნათ, რომ სამართლიანია შემდეგი დებულება:

დებულება 1. განტოლებათა (3.1.1) სისტემის ტრივიალური ამონახსნი $\dot{\omega}_k = 0$ შეესაბამება წრფივ თანაბარ მოძრაობას $\vec{a} = 0$, როდესაც დამუხტული ნაწილაკი არაფერს არ ასხივებს.

დებულება 2. გარდა ტრივიალური ამონახსნისა, განტოლებათა (3.1.1) სისტემას გააჩნია აგრეთვე არატრივიალური ამონახსნიც, რომლისთვისაც

$$\dot{\omega}_k \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

დამტკიცება. სისტემა (3.1.1) შედგება წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებებისგან $\dot{\omega}_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, წარმოებულების მიმართ და ამ სისტემის დეტერმინანტი $= 0$. ამის საჩვენებლად ჩავწეროთ (3.1.1) სისტემის მახასიათებელი პოლინომი

$$P(\lambda) = \det(\lambda g_k^i - u^i u_k) = \lambda^4 - \lambda^3 \text{Tr}(u^i u_k)$$

($P(\lambda)$ პოლინომის დანარჩენი შესაკრებები ნულებია). (3.1.3) პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\text{Tr}(u^i u_k) = u^k u_k = (u_0)^2 - u_\alpha u_\alpha = 1,$$

და, შედეგად

$$\det(g_k^i - u^i u_k) = P(1) = 0. \quad (3.1.7)$$

ადვილად მოწმდება, რომ (3.1.1) სისტემის რანგია 3:

$$\det(g_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta) = \det \begin{bmatrix} 1+(u_1)^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & 1+(u_2)^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & 1+(u_3)^2 \end{bmatrix} = 1 + u_\alpha u_\alpha = (u_0)^2 > 0. \quad (3.1.8)$$

ამდენად, (3.1.1) წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნების სიმრავლე წარმოადგენს ერთგანზომილებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეს [41] (რომელიც, არატრივიალურ $\dot{\omega}_k \neq 0, k=0,1,2,3$, ამონახსნებთან ერთად, ცხადია, შეიცავს ტრივიალურ ამონახსნსაც $\dot{\omega}_k = 0, k=0,1,2,3$, როგორც ნულოვან ვექტორს).

არატრივიალური ამონახსნების მოსაძებნად გადავწეროთ (3.1.1) შემდეგი სახით ((3.1.7) და (3.1.8) თანახმად, (3.1.1) სისტემა შეიცავს 3 და მხოლოდ 3 დამოუკიდებელ განტოლებას):

$$(g_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta) \dot{\omega}_\alpha = u_\beta u^0 \dot{\omega}_0. \\ (\beta = 1, 2, 3)$$

მაშინ, (3.1.8) – ის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\dot{\omega}_k = (\dot{\omega}_0 / u_0) u_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (\forall \dot{\omega}_0 \in \mathbb{R}). \quad (3.1.9)$$

(3.1.4) და (3.1.3) პირობების გათვალისწინებით ვპოულობთ

$$\omega^2 = \omega^k \omega_k = -u^k \dot{\omega}_k = -(\dot{\omega}_0 / u_0) u^k u_k = -\dot{\omega}_0 / u_0$$

და, მაშასადამე, (3.1.9) (და (3.1.1) პირობაც) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\dot{\omega}_k = -\omega^2 u_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.1.10)$$

ამ თანაფარდობის ორივე მხარე გავამრავლოთ ω^k და ავჯამოთ. მაშინ (3.1.3) გვაძლევს

$$\omega^k \dot{\omega}_k = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \omega^2 = -\omega^2 \omega^k u_k = 0.$$

ამრიგად, (3.1.6) – ის გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$\omega^2 = -a_0^2 = \text{const}. \quad (3.1.11)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$u_k = \dot{x}_k, \quad \omega_k = \ddot{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

და გავაინტეგრებთ (3.1.10) განტოლებებს (3.1.11) პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\ddot{x}_k = a_0^2 x_k + \omega_k^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3.1.12)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$\omega_k^{(0)} = \ddot{x}_k(\tau = 0), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, საწყისი პირობები ავირჩიოთ ისე, რომ

$$x_k(\tau=0)=0, \quad u_k(\tau=0)=\dot{x}_k(\tau=0)=u_k^{(0)}\equiv\beta_k, \quad k=0,1,2,3.$$

მაშინ (3.1.12) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი

$$x_k=A_k \cosh(a_0\tau)+B_k \sinh(a_0\tau)-\omega_k^{(0)}/a_0^2, \quad k=0,1,2,3, \quad (3.1.13)$$

შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$x_k=\omega_k^{(0)}a_0^{-2}(\cosh(a_0\tau)-1)+\beta_ka_0^{-1}\sinh(a_0\tau). \quad (3.1.14)$$

აღვნიშნოთ, რომ ქვემოთ გამოყენებულ აღნიშვნებში $\beta_0=\gamma_{|\tau=0}$, $\vec{\beta}=(\gamma\vec{v})_{|\tau=0}$, გვაქვს

$$\beta_k\beta^k=\beta_0^2-\vec{\beta}^2=1. \quad (3.1.15)$$

ამრიგად, მივიღეთ:

$$u_k=\dot{x}_k=\omega_k^{(0)}a_0^{-1}\sinh(a_0\tau)+\beta_k\cosh(a_0\tau), \quad (3.1.16)$$

$$\omega_k=\dot{u}_k=\ddot{x}_k=\omega_k^{(0)}\cosh(a_0\tau)+\beta_ka_0\sinh(a_0\tau) \quad (=a_0^2x_k+\omega_k^{(0)}), \quad (3.1.17)$$

$$\dot{\omega}_k=a_0^2\left[\omega_k^{(0)}a_0^{-1}\sinh(a_0\tau)+\beta_k\cosh(a_0\tau)\right] \quad (=a_0^2u_k), \quad (3.1.18)$$

რაც ამტკიცებს დებულებას 2.

შენიშვნა 1. ცხადია, ამონახსნები (3.1.16)–(3.1.17) აკმაყოფილებს აუცილებელ ზოგად პირობებს (3.1.3) და (3.1.4). ნაწილაკის საკუთარ ათვლის სისტემაში (3.1.16)–(3.1.17) ფორმულებში უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\beta_k=(1,\vec{0})$, $\omega_0^{(0)}=0$, $\vec{\omega}^{(0)}=\vec{a}_0$.

შენიშვნა 2. ფორმულები (3.1.14) და (3.1.16)–(3.1.18) გამოყვანილია იმ შემთხვევისთვის, როცა $a_0\neq 0$. მაგრამ ამ ფორმულებს აქვს სწორი ზღვარი, როცა $a_0\rightarrow 0$. კერძოდ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ასეთ შემთხვევაში გვაქვს $\omega_k^{(0)}\rightarrow 0$, (3.1.14) და (3.1.16)–(3.1.18) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$x_k=\beta_k\tau, \quad u_k=\beta_k, \quad \omega_k=\dot{\omega}_k=0, \quad k=0,1,2,3.$$

ამრიგად, მოძრაობა, რომელიც შეესაბამება (3.1.1) პირობას (გარდა წრფივი თანაბარი მოძრაობის ტრივიალური შემთხვევისა) შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა აჩქარებას აქვს საწყისი არანულოვანი მნიშვნელობა $a_0\neq 0$.

ქვემოთ მივიჩნევთ, რომ $a_0\neq 0$ და გამოვიყენებთ აღნიშვნებს

$$\omega_k^{(0)}/a_0=\alpha_k, \quad k=0,1,2,3. \quad (3.1.19)$$

ამ აღნიშვნებში, (3.1.3) და (3.1.6) გათვალისწინებით, ცხადია, გვექნება თანაფარდობები

$$\alpha^k\alpha_k=\alpha_0^2-\vec{\alpha}^2=-1, \quad (3.1.20)$$

$$\alpha^k\beta_k=\alpha_0\beta_0-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0. \quad (3.1.21)$$

შედეგად, კოში – ბუნიაკოვსკის უტოლობის [42] თანახმად, მივიღებთ

$$\alpha_0^2 \beta_0^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2 = (\alpha_0^2 + 1)(\beta_0^2 - 1) = \alpha_0^2 \beta_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1 \Rightarrow \beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1 \geq 0. \quad (3.1.22)$$

შენიშვნა 3. ჩავწეროთ მოძრაობის კანონები (3.1.16) და (3.1.17) მატრიცული ფორმით:

$$\begin{pmatrix} a_0^{-1} \omega_k(\tau) \\ u_k(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (\vartheta = a_0 \tau) \quad (3.1.23)$$

ანუ, მიღებული მოძრაობის კანონები არის ორთოგონალური გარდაქმნა – მობრუნება $\vartheta = a_0 \tau$ კუთხეზე ფსევდოევკლიდურ სივრცეში $\mathbb{P}_{1,1}^2$. ასეთი მობრუნება, ცხადია, არ ცვლის ამ სივრცეში ვექტორების სკალარულ ნამრავლებს (რომლებიც გამოითვლება ფსევდოევკლიდური მეტრიკის გამოყენებით):

$$\begin{aligned} (a_0^{-1} \omega_k(\tau), u_k(\tau)) \begin{pmatrix} a_0^{-1} \omega_l(\tau) \\ u_l(\tau) \end{pmatrix} &= \\ &= a_0^{-2} \omega_k(\tau) \omega_l(\tau) - u_k(\tau) u_l(\tau) = \text{inv} = \alpha_k \alpha_l - \beta_k \beta_l, \quad k, l = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

კერძოდ, თუ (3.1.24)-ში ავიღებთ $k=0, l=1, 2, 3$, მივიღებთ სასარგებლო თანაფარდობას:

$$a_0^{-2} \omega_0(\tau) \vec{\omega}(\tau) - u_0(\tau) \vec{u}(\tau) = \alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}. \quad (3.1.25)$$

თუ (3.1.24)-ში ავიღებთ $k=l$, გვექნება

$$a_0^{-2} \omega_k(\tau) \omega_k(\tau) - u_k(\tau) u_k(\tau) = \alpha_k \alpha_k - \beta_k \beta_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3.1.26)$$

რაც, k ინდექსით აჯამვის შემდეგ (ფსევდოევკლიდური მეტრიკის გათვალისწინებით) მოგვცემს კიდევ ერთ სასარგებლო ფორმულას:

$$a_0^{-2} \omega_k(\tau) \omega^k(\tau) - u_k(\tau) u^k(\tau) = \alpha_k \alpha^k - \beta_k \beta^k.$$

აქედან, (3.1.3), (3.1.15) და (3.1.21) გათვალისწინებით, მიიღება ცნობილი შედეგი (3.1.6):

$$a_0^{-2} \omega^2(\tau) - 1 = -2 \Rightarrow \omega^2(\tau) = -a_0^2.$$

განვიხილოთ 6 ანტისიმეტრიული ტენზორი $A_{kl} = -A_{lk} \in \mathbb{P}_{1,1}^2$, $k, l = 0, 1, 2, 3$, რომლებიც ინვარიანტული უნდა იყოს 2-განზომილებიან სივრცეში (3.1.23) მობრუნების მიმართ (ანტისიმეტრიული ტენზორი ინვარიანტულია, თუ მისი რანგი ემთხვევა სივრცის განზომილებას, იხ., მაგ., [7], §6):

$$\begin{aligned} A_{kl} &= a_0^{-1} \omega_k(\tau) u_l(\tau) - a_0^{-1} u_k(\tau) \omega_l(\tau) = \text{inv} = \alpha_k \beta_l - \beta_k \alpha_l. \\ &(k, l = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

კერძოდ, გვექნება

$$a_0^{-1} (\omega_0(\tau) \vec{u}(\tau) - u_0(\tau) \vec{\omega}(\tau)) = \alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha}. \quad (3.1.28)$$

ცხადია, (3.1.23) გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული 3-განზომილებიანი ევკლიდური ვექტორების ევკლიდური სკალარული ნამრავლებიც დარჩება ინვარიანტული (3.1.23) გარდაქმნის მიმართ. კერძოდ, (3.1.15), (3.1.21) და (3.1.22) გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} [a_0^{-2}\omega_0(\tau)\vec{\omega}(\tau) - u_0(\tau)\vec{u}(\tau)]^2 &= (\alpha_0\vec{\alpha} - \beta_0\vec{\beta})^2 = \\ &= \alpha_0^2(\alpha_0^2 + 1) - 2\alpha_0^2\beta_0^2 + \beta_0^2(\beta_0^2 - 1) = \\ &= (\beta_0^2 - \alpha_0^2)(\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1), \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} a_0^{-2}[\omega_0(\tau)\vec{u}(\tau) - u_0(\tau)\vec{\omega}(\tau)]^2 &= (\alpha_0\vec{\beta} - \beta_0\vec{\alpha})^2 = \\ &= \alpha_0^2(\beta_0^2 - 1)^2 - 2\alpha_0^2\beta_0^2 + \beta_0^2(\alpha_0^2 + 1) = \beta_0^2 - \alpha_0^2. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

ამ თანაფარდობებს გამოვიყენებთ შემდგომი გამოთვლებისას.

3.2. ტრაექტორია

(3.1.1) პირობის შესაბამისი მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლებას მივიღებთ მოძრაობის კანონის აღმწერი (3.1.14) ფორმულებიდან τ საკუთარი დროის გამორიცხვით. წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი დებულების მართებულობა:

დებულება 3. (3.1.1) პირობის შესაბამისი მოძრაობის ტრაექტორია ბრტყელი წირია.

ამ დებულების დასამტკიცებლად დაგვჭირდება შემდეგი ლემა:

ლემა 1. (3.1.1) პირობის შესაბამისი მოძრაობისთვის მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$(d/d\tau)(\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau)) = 0. \quad (3.2.1)$$

ლემის დამტკიცება. (3.1.25) და (3.1.28) ფორმულებიდან დავასკვნით, რომ

$$\begin{aligned} (a_0^{-2}\omega_0(\tau)\vec{\omega}(\tau) - u_0(\tau)\vec{u}(\tau)) \times a_0^{-1}(\omega_0(\tau)\vec{u}(\tau) - u_0(\tau)\vec{\omega}(\tau)) &= (\alpha_0\vec{\alpha} - \beta_0\vec{\beta}) \times (\alpha_0\vec{\beta} - \beta_0\vec{\alpha}) \\ \Rightarrow a_0^{-1}(u_0^2(\tau) - a_0^{-2}\omega_0^2(\tau))\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau) &= (\beta_0^2 - \alpha_0^2)\vec{\beta} \times \vec{\alpha} = \text{inv.} \end{aligned}$$

გარდა ამისა, ფორმულები (3.1.26) და (3.1.22) გვაძლევს

$$u_0^2(\tau) - a_0^{-2}\omega_0^2(\tau) = \beta_0^2 - \alpha_0^2 \geq 1. \quad (3.2.2)$$

ამიტომ ვღებულობთ:

$$\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau) = a_0(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) = \text{inv.} \quad (3.2.3)$$

ამდენად, ლემა 1 მართებულია.

დებულების დამტკიცება. გამოვიყენოთ ცნობილი ფორმულები წირის $\vec{t}(\tau)$ მხეხისა და $\vec{n}(\tau)$ მთავარი ნორმალისთვის 3-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში [43]. განსახილველი ტრაექტორიისთვის მივიღებთ

$$\begin{aligned}\vec{t}(\tau) &= |\vec{v}|^{-1} \vec{v}(\tau) = |\vec{u}|^{-1} \dot{\vec{u}}(\tau) \Rightarrow \\ \vec{t}^2 &= 1 \Rightarrow \vec{t}(\tau) \cdot \dot{\vec{t}}(\tau) = 0 \Rightarrow \\ \dot{\vec{t}}(\tau) &= |\dot{\vec{t}}| \vec{n}(\tau), \quad \vec{n}^2 = 1.\end{aligned}$$

წარმოებულის გამოთვლის შედეგად, მივიღებთ

$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \vec{t}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \frac{\vec{u}(\tau)}{|\vec{u}(\tau)|} = \frac{\dot{\vec{u}}(\tau) |\vec{u}(\tau)| - \vec{u}(\tau) (\dot{\vec{u}}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau)) |\vec{u}(\tau)|^{-1}}{\vec{u}^2(\tau)} = \\ &= \frac{\vec{\omega}(\tau) \vec{u}^2(\tau) - \vec{u}(\tau) (\vec{\omega}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau))}{|\vec{u}(\tau)|^3} = \frac{\vec{u}(\tau) \times (\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau))}{|\vec{u}(\tau)|^3}.\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

დავუშვათ, რომ $\vec{\beta} \times \vec{\alpha} \neq 0$. მაშინ, (3.2.3) თანახმად, გვექნება

$$\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau) \neq 0, \quad \forall \tau.$$

მაშასადამე $\dot{\vec{t}}(\tau) \neq 0$ და ვღებულობთ

$$\vec{n}(\tau) = \frac{\dot{\vec{t}}(\tau)}{|\dot{\vec{t}}(\tau)|} = \frac{\vec{u}(\tau) \times (\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau))}{|\vec{u}(\tau) \times (\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau))|} = \frac{\vec{u}(\tau) \times (\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau))}{|\vec{u}(\tau)| |\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau)|}.\quad (3.2.5)$$

გამოვითვალოთ ტრაექტორიის ბინორმალის $\vec{b}(\tau) = \vec{t}(\tau) \times \vec{n}(\tau)$:

$$\begin{aligned}\vec{b}(\tau) &= \vec{t}(\tau) \times \vec{n}(\tau) = \frac{\vec{u}(\tau)}{|\vec{u}(\tau)|} \times \frac{\vec{u}(\tau) \times (\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau))}{|\vec{u}(\tau)| |\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau)|} = \\ &= \vec{u}(\tau) \times \frac{\vec{\omega}(\tau) \vec{u}^2(\tau) - \vec{u}(\tau) (\vec{\omega}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau))}{\vec{u}^2(\tau) |\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau)|} = \frac{\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau)}{|\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau)|}.\end{aligned}$$

ამრიგად, ლემის გათვალისწინებით, ვასკვნით, რომ

$$\vec{b}(\tau) = \frac{\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau)}{|\vec{\omega}(\tau) \times \vec{u}(\tau)|} = \frac{\vec{\beta} \times \vec{\alpha}}{|\vec{\beta} \times \vec{\alpha}|} = \text{inv}\quad (3.2.6)$$

და $\vec{\beta} \times \vec{\alpha} \neq 0$ შემთხვევისთვის დებულება 3 მართებულია.

თუ $\vec{\beta} \times \vec{\alpha} = 0$, მაშინ, (3.2.3) თანახმად,

$$\vec{u}(\tau) \times \vec{\omega}(\tau) = 0, \quad \forall \tau.$$

ამიტომ, (3.2.4) გვაძლევს

$$\vec{\beta} \times \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{t}}(\tau) = 0 \Rightarrow \vec{t}(\tau) = \text{const}.\quad (3.2.7)$$

მაშასადამე, ტრაექტორია წრფივია და დებულება 3 მართებულია ამ შემთხვევაშიც.

ტრაექტორიის განტოლების ცხადი სახით პოვნისთვის ჩავწერთ მოძრაობის (3.1.14) განტოლებები შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}x_0 &= a_0^{-1}(\alpha_0(\cosh \vartheta - 1) + \beta_0 \sinh \vartheta), \\ \vec{x}_{\parallel} &= a_0^{-1}(\vec{\alpha}(\cosh \vartheta - 1) + \vec{\beta}_{\parallel} \sinh \vartheta), \\ \vec{x}_{\perp} &= a_0^{-1} \vec{\beta}_{\perp} \sinh \vartheta. \\ (\vartheta &= a_0 \tau, \quad a_0 \neq 0)\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნები

$$\vec{\beta}_{\parallel} \equiv \vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\alpha}^{-2}, \quad \vec{\beta}_{\perp} = \vec{\beta} - \vec{\beta}_{\parallel}, \quad \vec{x}_{\parallel} \equiv \vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{x}) \vec{\alpha}^{-2}, \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}.$$

გარდა ამისა, ვგულისხმობთ, რომ $a_0 > 0$. შემოვიღოთ ახალი უგანზომილები ცვლადები

$$\xi_0 = x_0 a_0, \quad \vec{\xi}_{\parallel} = a_0 \vec{x}_{\parallel}, \quad \vec{\xi}_{\perp} = a_0 \vec{x}_{\perp}$$

და (3.2.8) ჩავწერთ კოორდინატთა სისტემაში შემდეგნაირად არჩეული ღერძებით ($\beta_{\perp} \neq 0$): $Ox \parallel \vec{\alpha}$, $Oy \parallel \vec{\beta}_{\perp}$. მივიღებთ

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \alpha_0(\cosh \vartheta - 1) + \beta_0 \sinh \vartheta, \\ \xi_{\parallel} &= \alpha(\cosh \vartheta - 1) + \beta_{\parallel} \sinh \vartheta, \\ \xi_{\perp} &= \beta_{\perp} \sinh \vartheta. \\ (\alpha > 0, \quad \beta_{\perp} > 0)\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

ცხადია, რომ

$$\xi_0 = \alpha_0 \left(\sqrt{1 + \xi_{\perp}^2 / \beta_{\perp}^2} - 1 \right) + \beta_0 \xi_{\perp} / \beta_{\perp},\tag{3.2.10}$$

$$\xi_{\parallel} = \alpha \left(\sqrt{1 + \xi_{\perp}^2 / \beta_{\perp}^2} - 1 \right) + \beta_{\parallel} \xi_{\perp} / \beta_{\perp}.\tag{3.2.11}$$

$$(\alpha > 0, \quad \beta_{\perp} > 0; \quad \beta_0^2 = \beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2 + 1)$$

განტოლება (3.2.11) გვაძლევს (3.1.1) პირობის შესაბამისად მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის ტრაექტორიას. გადავწერთ (3.2.11), როგორც

$$(\xi_{\parallel} - \beta_{\parallel} \xi_{\perp} / \beta_{\perp} + \alpha)^2 - \alpha^2 (\xi_{\perp} / \beta_{\perp})^2 = \alpha^2,$$

ან ექვივალენტური სახით, როგორც

$$\left[\xi_{\parallel}^2 - 2\beta_{\parallel} \beta_{\perp}^{-1} \xi_{\parallel} \xi_{\perp} + (\beta_{\parallel}^2 - \alpha^2) \beta_{\perp}^{-2} \xi_{\perp}^2 \right] + 2\alpha (\xi_{\parallel} - \beta_{\parallel} \beta_{\perp}^{-1} \xi_{\perp}) = 0.\tag{3.2.12}$$

რამდენადაც კვადრატულ ფორმებში მოთავსებული კვადრატული ფორმის ($\xi_{\parallel}$, $\xi_{\perp}$ ცვლადების მიმართ) მატრიცას

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{\parallel} / \beta_{\perp} \\ -\beta_{\parallel} / \beta_{\perp} & (\beta_{\parallel}^2 - \alpha^2) \beta_{\perp}^{-2} \end{bmatrix}$$

აქვს უარყოფითი დეტერმინანტი:

$$\det D_2 = (\beta_{\parallel}^2 - \alpha^2) \beta_{\perp}^{-2} - \beta_{\parallel}^2 \beta_{\perp}^{-2} = -\alpha^2 \beta_{\perp}^{-2} < 0.$$

$$(\alpha > 0, \beta_{\perp} > 0)$$

ვასკვნით, რომ ამ ფორმის საკუთარ მნიშვნელობებს აქვთ საპირისპირო ნიშანი და, მაშასადამე, ტრაექტორია არის ჰიპერბოლა.

შენიშვნა 4. სრული კვადრატული ფორმის მატრიცას (3.2.12) ფორმულის მარცხენა მხარეში აქვს დადებით დეტერმინანტი:

$$\det D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{\parallel} / \beta_{\perp} & \alpha \\ -\beta_{\parallel} / \beta_{\perp} & (\beta_{\parallel}^2 - \alpha^2) \beta_{\perp}^{-2} & -\alpha \beta_{\parallel} / \beta_{\perp} \\ \alpha & -\alpha \beta_{\parallel} / \beta_{\perp} & 0 \end{bmatrix} = \alpha^4 \beta_{\perp}^{-2} > 0. \quad (\alpha > 0, \beta_{\perp} > 0)$$

ამიტომ, $\alpha > 0, \beta_{\perp} > 0$ შემთხვევაში ჰიპერბოლა არ არის გადაგვარებული [44].

განტოლება (3.2.10) ადვილად ამოიხსნება $\eta = \xi_{\perp} / \beta_{\perp} = \sinh \vartheta$ ცვლადის მიმართ:

$$(\xi_0 - \beta_0 \eta)^2 + 2\alpha_0(\xi_0 - \beta_0 \eta) - \alpha_0^2 \eta^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\eta = (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{-1} \left[\beta_0(\alpha_0 + \xi_0) \pm |\alpha_0| \sqrt{\beta_0^2 - \alpha_0^2 + (\alpha_0 + \xi_0)^2} \right].$$

მაშასადამე, (3.1.1) პირობის შესაბამისად მოძრავი ნაწილაკისთვის ტრაექტორია შეიძლება

ჩავწეროთ $x_0 = a_0^{-1} \xi_0$ ლაბორატორიული დროის ტერმინებში შემდეგი სახით:

$$\xi_{\perp} = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_0^2 - \alpha_0^2} \left[\beta_0(\xi_0 + \alpha_0) \pm |\alpha_0| \sqrt{\beta_0^2 - \alpha_0^2 + (\xi_0 + \alpha_0)^2} \right], \quad (3.2.13)$$

$$\xi_{\parallel} = \frac{\alpha}{\alpha_0} \left(\xi_0 - \frac{\beta_0 - \beta_{\parallel}}{\beta_{\perp}} \xi_{\perp} \right). \quad (3.2.14)$$

$$(\beta_{\perp} > 0, \alpha_0^2 \neq 0)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\beta_{\perp} = 0$ ($\alpha_0^2 \neq 0$), (3.2.8) განტოლებები დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \alpha_0 (\cosh \vartheta - 1) + \beta_0 \sinh \vartheta, \\ \vec{\xi}_{\parallel} &= \vec{\xi} = \vec{\alpha} (\cosh \vartheta - 1) + \vec{\beta} \sinh \vartheta, \\ \xi_{\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში ტრაექტორია წრფივია, რადგანაც $\beta_{\perp} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$.

წრფივ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონს $x_0 = a_0^{-1} \xi_0$ ლაბორატორიული დროის ტერმინებში აქვს შემდეგი სახე:

$$(\xi_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\xi} + \alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha})^2 - (\alpha_0 \vec{\xi} - \xi_0 \vec{\alpha})^2 = (\alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha})^2,$$

რაც შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც (აქ, ისევე, როგორც ზემოთ, აღნიშნულია $\xi \equiv |\vec{\xi}|$, $\alpha \equiv |\vec{\alpha}|$, $\beta \equiv |\vec{\beta}|$)

$$\xi^2(\beta_0^2 - \alpha_0^2) + 2\xi\xi_0(\alpha_0\alpha - \beta_0\beta) + \xi_0^2(\beta^2 - \alpha^2) + 2(\beta_0\xi - \xi_0\beta)(\alpha_0\beta - \beta_0\alpha) = 0. \quad (3.2.16)$$

$\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$ შემთხვევაში, (3.1.29), (3.1.30), (3.1.15), (3.1.20) და (3.1.22) გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$\begin{aligned} \beta_0^2 - \alpha_0^2 &= 1, \\ \beta^2 - \alpha^2 &= \beta_0^2 - \alpha_0^2 - 2 = -1, \\ (\alpha_0\beta - \beta_0\alpha)^2 &= \beta_0^2 - \alpha_0^2 = 1, \\ \alpha_0\alpha - \beta_0\beta &= 0. \end{aligned}$$

ამიტომ, ამ შემთხვევაში მოძრაობის კანონი (3.2.16) გამარტივდება:

$$\xi^2 - \xi_0^2 + 2(\beta_0\xi - \xi_0\beta) = 0. \quad (3.2.16')$$

(3.2.16) კვადრატული ფორმის ორთოგონალური ინვარიანტებია (იხ., მაგ., [44])

$$\det \begin{bmatrix} \beta_0^2 - \alpha_0^2 & \alpha_0\alpha - \beta_0\beta & -\beta_0(\alpha_0\beta - \beta_0\alpha) \\ \alpha_0\alpha - \beta_0\beta & \beta^2 - \alpha^2 & \beta(\alpha_0\beta - \beta_0\alpha) \\ -\beta_0(\alpha_0\beta - \beta_0\alpha) & \beta(\alpha_0\beta - \beta_0\alpha) & 0 \end{bmatrix} = \beta_0^2 - \beta^2 = 1 > 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} \beta_0^2 - \alpha_0^2 & \alpha_0\alpha - \beta_0\beta \\ \alpha_0\alpha - \beta_0\beta & \beta^2 - \alpha^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 < 0,$$

ამდენად, (3.2.16) კვადრატული ფორმით წარმოდგენილი მოძრაობის კანონი აღწერს $\vec{x} = \vec{x}(x_0)$ დამოკიდებულებას როგორც არაგადაგვარებულ ჰიპერბოლას.

b) ნაშრომში [67] ჩამოვყალიბეთ და დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 1. თუ $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq 0$, მაშინ არსებობს ლორენცის გარდაქმნა, რომლის შედეგად 3-განზომილებიანი $\vec{\alpha}$ და $\vec{\beta}$ ვექტორები კოლინეარული გახდება.

თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ დავამტკიცოთ ორი სასარგებლო ლემა:

ლემა 2. თუ 3-ვექტორები $\vec{\alpha}$ და $\vec{\beta}$ არ არის კოლინეარული, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq 0$, მაშინ ვექტორები

$$\vec{e}_1 = \frac{\alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha}}{|\alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}}{|\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{\alpha} \times \vec{\beta}}{|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}|}, \quad (3.2.17)$$

შეადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს 3-განზომილებიან სივრცეში.

ლემის დამტკიცება. (3.1.29), (3.1.30) და (3.1.22) ფორმულების თანახმად, გვაქვს:

$$\begin{aligned}(\alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha})^2 &= \beta_0^2 - \alpha_0^2 \geq 1 > 0, \\(\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta})^2 &= (\beta_0^2 - \alpha_0^2)(\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1) \geq 0, \\(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 &= \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2 - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1 \geq 0.\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

ტოლობები (3.2.18) მარჯვენა მხარეებში შეესაბამება მხოლოდ კოლინეარულ $\vec{\alpha}$ და $\vec{\beta}$ ვექტორებს. ამიტომ, ლემის პირობის თანახმად, (3.2.17) განმარტება კორექტულია. სამივე ვექტორი $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ და $\vec{e}_3$ ერთეულოვანია, განმარტების თანახმად.

ცხადია, (3.2.17) განმარტება გვაძლევს

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

გავსინჯოთ $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$. (3.1.15), (3.1.20) და (3.1.21) თანახმად, გვექნება

$$\begin{aligned}(\beta_0 \vec{\alpha} - \alpha_0 \vec{\beta}) \cdot (\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}) &= \alpha_0 \beta_0 (\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2) - (\alpha_0^2 + \beta_0^2) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \\&= \alpha_0 \beta_0 (\vec{\alpha}^2 - \alpha_0^2 + \vec{\beta}^2 - \beta_0^2) = 0.\end{aligned}$$

ამრიგად, ლემა 2 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5. ადვილია შემოწმება, რომ (3.2.17) ბაზისს აქვს მარჯვენა ორიენტაცია:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.\tag{3.2.19}$$

ლემა 3. *დავუშვათ, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq 0$ და ტრაექტორიის ყოველ წერტილში (ანუ საკუთარი τ დროის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის) განვმარტოთ შემდეგი 3-ვექტორები:*

$$\vec{\lambda} \equiv a_0^{-1}(\omega_0(\tau)\vec{u}(\tau) - u_0(\tau)\vec{\omega}(\tau)), \quad \vec{\mu} \equiv a_0^{-2}\omega_0(\tau)\vec{\omega}(\tau) - u_0(\tau)\vec{u}(\tau), \quad \vec{\nu} = \vec{\lambda} \times \vec{\mu}, \tag{3.2.20}$$

სადაც $u_k(\tau)$ და $\omega_k(\tau)$, $k = 0, 1, 2, 3$, განსაზღვრულია (3.1.16)–(3.1.17) ფორმულებით. მაშინ ვექტორები $\vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|$, $\vec{\mu}/|\vec{\mu}|$, $\vec{\nu}/|\vec{\nu}|$ შეადგენს 3-განზომილებიან მუდმივ ბაზისს ნაწილაკის ტრაექტორიის გასწვრივ და, მაშასადამე, განსაზღვრავს გლობალურ დეკარტის სისტემას 3-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში.

ლემის დამტკიცება. თანახმად (3.1.25) და (3.1.28) ფორმულებისა, გვაქვს

$$\vec{\lambda} = \alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha}, \quad \vec{\mu} = \alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}.\tag{3.2.21}$$

მაშასადამე, ლემა 2 თანახმად, ვექტორები $\vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|$ და $\vec{\mu}/|\vec{\mu}|$ არის კორექტულად განმარტებული, ორთონორმირებული და ინვარიანტული ტრაექტორიის გასწვრივ. ამიტომ, ვექტორი

$$(\vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|) \times (\vec{\mu}/|\vec{\mu}|) = \vec{\nu}/(|\vec{\lambda}||\vec{\mu}|) = \vec{\nu}/|\vec{\nu}|$$

არის განმარტებული კორექტულად და ცალსახად განმარტებული ტრაექტორიის ნების-

მიერ წერტილში და $\vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|$ და $\vec{\mu}/|\vec{\mu}|$ ვექტორებთან ერთად შეადგენს 3-განზომილებიანი სივრცის ორთონორმირებულ გლობალურ ბაზისს. ამრიგად, ლემა 3 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თანახმად (3.2.20), (3.2.21) და (3.2.18) ფორმულებისა, გვაქვს

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (\alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha}) \times (\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}) = (\beta_0^2 - \alpha_0^2) \vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \\ \vec{v}^2 &= (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^2 (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 = (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^2 (\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1) = \vec{\lambda}^2 \vec{\mu}^2.\end{aligned}$$

თეორემის დამტკიცება. გამოვიყენოთ ფორმულები (იხ., მაგ., [45], §2.9) ნებისმიერი მიმართულებით ორიენტირებული ბუსტით გარდაქმნისვის:

$$\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}' = \vec{\alpha} + (\gamma - 1) \vec{v}^{-2} \vec{v} (\vec{\alpha} \cdot \vec{v}) - \gamma \vec{v} \alpha_0,$$

$$\vec{\beta} \rightarrow \vec{\beta}' = \vec{\beta} + (\gamma - 1) \vec{v}^{-2} \vec{v} (\vec{\beta} \cdot \vec{v}) - \gamma \vec{v} \beta_0.$$

გარდაქმნის შედეგად მიღებული ვექტორები $\vec{\alpha}'$ და $\vec{\beta}'$ ჩავთვალოთ კოლინეარულად. მაშინ მივიღებთ პირობას, რომელიც ედება ბუსტის პარამეტრს (სიჩქარეს) $\vec{v}$

$$0 = \vec{\alpha}' \times \vec{\beta}' = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \vec{v} [(\gamma - 1) \vec{v}^{-2} \vec{\beta} \cdot \vec{v} - \gamma \beta_0] - \vec{\beta} \times \vec{v} [(\gamma - 1) \vec{v}^{-2} \vec{\alpha} \cdot \vec{v} - \gamma \alpha_0],$$

რაც შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$0 = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} + (\gamma - 1) \vec{v}^{-2} [(\vec{\alpha} \times \vec{v})(\vec{\beta} \cdot \vec{v}) - (\vec{\beta} \times \vec{v})(\vec{\alpha} \cdot \vec{v})] - \gamma (\beta_0 \vec{\alpha} - \alpha_0 \vec{\beta}) \times \vec{v}.$$

გარდავქმნათ კვადრატულ ფრჩხილებში მდგარი გამოსახულება:

$$[\vec{\alpha}(\vec{\beta} \cdot \vec{v}) - \vec{\beta}(\vec{\alpha} \cdot \vec{v})] \times \vec{v} = [\vec{v} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})] \times \vec{v} = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{v}^2 - \vec{v} [\vec{v} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})].$$

შედეგად, გამარტივებების შემდეგ მივიღებთ

$$(\alpha_0 \vec{\beta} - \beta_0 \vec{\alpha}) \times \vec{v} + (1 - \gamma^{-1}) \vec{v}^{-2} \vec{v} [\vec{v} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})] + \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0. \quad (3.2.22)$$

ჩავწეროთ საძიებელი სიჩქარე (3.2.17) ბაზისში:

$$\vec{v} = \nu_1 \vec{e}_1 + \nu_2 \vec{e}_2 + \nu_3 \vec{e}_3,$$

და შევიტანოთ (3.2.22) განტოლებაში. მივიღებთ:

$$(\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{1/2} (\nu_2 \vec{e}_3 - \nu_3 \vec{e}_2) + (\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)^{1/2} [(1 - \gamma^{-1}) \vec{v}^{-2} (\nu_1 \vec{e}_1 + \nu_2 \vec{e}_2 + \nu_3 \vec{e}_3) \nu_3 + \vec{e}_3] = 0.$$

ამიტომ, გვექნება

$$\begin{aligned}\nu_1 &= 0, \\ -\nu_3 (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{1/2} + (\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)^{1/2} (1 - \gamma^{-1}) \vec{v}^{-2} \nu_3 &= 0, \\ \nu_2 (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{1/2} + (\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)^{1/2} [(1 - \gamma^{-1}) \vec{v}^{-2} \nu_3^2 + 1] &= 0.\end{aligned}$$

უკანასკნელ განტოლებებს აქვს ერთადერთი ამონახსნი (დაშვება $\nu_3 \neq 0$ გვაძლევს

$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \nu^2} = 2$, რაც შეუძლებელია):

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_3 = 0, \quad \nu_2 = -(\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)^{1/2} (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{-1/2}.$$

მაშასადამე, (3.2.18) გათვალისწინებით, საბოლოოდ ვპოულობთ

$$\vec{v} = - \frac{(\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)^{1/2}}{(\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{1/2}} \frac{\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}}{(\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)^{1/2} (\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{1/2}} = - \frac{\alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta}}{\beta_0^2 - \alpha_0^2}. \quad (3.2.23)$$

ამრიგად, თეორემა 1 დამტკიცებულია.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, თუ $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$ მაშინ, (3.1.22) და (3.2.18) თანახმად, გვაქვს

$$\beta_0^2 - \alpha_0^2 = 1, \quad \alpha_0 \vec{\alpha} - \beta_0 \vec{\beta} = 0. \quad (3.2.24)$$

ამდენად, მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

დებულება 4. თუ $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}$, მაშინ $k = \beta_0 / \alpha_0$:

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (\beta_0 / \alpha_0) \vec{\beta}. \quad (3.2.25)$$

შედეგი. თუ $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$, მაშინ, თანახმად (3.2.24) ფორმულისა, გვაქვს

$$\vec{\beta} \beta_0 = \vec{\alpha} \alpha_0,$$

და თანაფარდობა (3.1.21) გვაძლევს თანაფარდობას

$$\vec{\beta}^2 \beta_0 = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} \alpha_0 = \alpha_0^2 \beta_0,$$

რაც, (3.2.25) გათვალისწინებით, იძლევა შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \pm |\vec{\beta}|, \\ \vec{\alpha} &= \vec{\beta} \beta_0 / \alpha_0 = \pm \vec{\beta} \beta_0 / |\vec{\beta}|, \\ |\vec{\alpha}| &= \beta_0 > 0. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

შენიშვნა 6. ცხადია, $\vec{\alpha}'$ და $\vec{\beta}'$ ვექტორების კოლინეარობა არ დაირღვევა, თუ შევასრულებთ კიდევ ერთ ბუსტს ამ ვექტორების საერთო მიმართულებით, ბუსტის პარამეტრის (სიჩქარის) ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. მაგრამ $\vec{\alpha}'$ და $\vec{\beta}'$ ვექტორების სიდიდეები ასეთი ბუსტის შედეგად შეიცვლება. თანახმად (3.1.15) პირობისა, 4-ვექტორი β^k დროის-მაგვარია (4-ვექტორი α^k , (3.1.20) თანახმად, არის სივრცისმაგვარი). ცხადია, რომ ბუსტი, რომლის პარამეტრია

$$\vec{v} = \vec{\beta}' / \beta'_0, \quad \gamma' = \beta'_0 \quad (3.2.27)$$

მოგვცემს $\vec{\beta}' \rightarrow \vec{\beta}'' = 0$ (ეს ბუსტი გადაგვიყვანს დამუხტული ნაწილაკის მყისიერ თანამდევ ინერციულ ათვლის სისტემაში). მაშინ

$$\beta'^k \rightarrow \beta''^k = (1, 0), \quad (3.2.28)$$

და, (3.2.24) საფუძველზე, ვპოულობთ

$$\alpha'^k \rightarrow \alpha''^k = (0, \vec{\alpha}''),$$

სადაც, ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების თანახმად, გვაქვს

$$\vec{\alpha}'' = \gamma'(\vec{\alpha}' - \alpha'_0 \vec{\beta}' / \beta'_0) = \beta'_0 \vec{\alpha}' - \alpha'_0 \vec{\beta}'.$$

$$(\vec{\alpha}' \times \vec{\beta}' = 0, \quad \vec{\alpha}' \neq 0, \quad \vec{\beta}' \neq 0)$$

შევნიშნოთ, რომ პირობა $\vec{\alpha}' \times \vec{\beta}' = 0$ უზრუნველყოფს აუცილებელ თანაფარდობას

$$\vec{\alpha}''^2 = (\beta'_0 \vec{\alpha}' - \alpha'_0 \vec{\beta}')^2 = 1.$$

ამასთან, დებულება 4-ის თანახმად, თანაფარდობები (3.2.24) და (3.2.25) გვამღევს შედეგს:

$$\vec{\alpha}'' = \beta'_0 \vec{\alpha}' - \alpha'_0 \vec{\beta}'_0 = \frac{\vec{\beta}'}{\alpha'_0} = \frac{\vec{\alpha}'}{\beta'_0}. \quad (3.2.29)$$

ცხადია, დაცულია (3.2.26) თანაფარდობების მსგავსი პირობებიც.

შენიშვნა 7. ცხადია, კოვარიანტული პირობა (3.1.1) არ ირღვევა ლორენცის ნებისმიერი გარდაქმნის შედეგად. ამიტომ თეორემა 1 გვამღევს საშუალებას შევისწავლოთ ასეთი მოძრაობის თანმხლები მნიშვნელოვანი ფიზიკური მოვლენები სპეციალურ ათვლის სისტემაში – დამუხტული ნაწილაკის მყისად თანამდევ ინერციულ ათვლის სისტემაში. ეს, თანახმად (3.1.25) ფორმულისა, ნიშნავს, რომ ნაწილაკის ტრაექტორიის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება ავირჩიოთ მოძრაობის საწყის წერტილად და, შენიშვნა 6-ის შესაბამისად, ჩავთვალოთ, რომ ამ წერტილში ნაწილაკის სიჩქარე ნულია. მაშინ, თანახმად (3.2.7) ფორმულისა, ტრაექტორია იქნება წრფივი (ამ ათვლის სისტემის მიმართ) და მოძრაობის კანონი აიწერება (3.2.15) – (3.2.16') ფორმულებით, სადაც უნდა მივიჩნიოთ

$$\beta_0 = 1, \quad \vec{\beta} = \vec{0}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \vec{\alpha} = (1, 0, 0).$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\xi_0 = \sinh \vartheta, \quad \xi_x = \cosh \vartheta - 1, \quad \xi_y = \xi_z = 0$$

და ტრაექტორიის განტოლებას ექნება სახე

$$(\xi_x + 1)^2 - \xi_0^2 = 1. \quad (3.2.30)$$

სწორედ ამ მოძრაობას უწოდა მაქს ბორნმა [24] *ჰიპერბოლური მოძრაობა*.

ცხადია, ფიზიკურად მნიშვნელოვანი შედეგები ნებისმიერ ინერციულ ათვლის სისტემაში შეიძლება ვიპოვოთ ასეთი სპეციალური ათვლის სიტემიდან მოცემულ ათვლის სისტემაში გადასვლით, სათანადო პარამეტრის (სიჩქარის) შესაბამისი ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების გამოყენებით.

3.3. გარეშე ელექტრომაგნიტური ველები, რომლებიც უზრუნველყოფს ჰიპერბოლურ მოძრაობას

საინტერესოა მოიძებნოს გარეშე ელექტრომაგნიტური ველი F_{kl} რომელიც უზრუნველყოფს მოძრაობის (3.1.14) კანონს. რამდენადაც გამოსხივების რეაქცია ამ შემთხვევაში არ გვაქვს, მოძრაობის კანონში ([7], §23) გვექნება მხოლოდ გარეშე ველი:

$$m\dot{u}_k = eF_{kl}u^l. \quad (3.3.1)$$

თეორემა 2. მოძრაობის კანონს, რომელიც შეესაბამება პირობას (3.1.1), უზრუნველყოფს მხოლოდ სტატიკური ერთგვაროვანი ელექტრომაგნიტური ველი.

დამტკიცება. შევიტანოთ (3.3.1) მოძრაობის განტოლებაში დამოკიდებულებები (3.1.16) და (3.1.17):

$$\alpha_k \cosh \vartheta + \beta_k \sinh \vartheta = (e/m)a_0^{-1}F_{kl}(\alpha^l \sinh \vartheta + \beta^l \cosh \vartheta). \quad (3.3.2)$$

განტოლება (3.3.2) დაკმაყოფილდება იგივეურად, თუ ავირჩევთ

$$(e/m)a_0^{-1}F_{kl}\beta^l = \alpha_k, \quad (e/m)a_0^{-1}F_{kl}\alpha^l = \beta_k. \quad (3.3.3)$$

ახალ უგანზომილებო ცვლადებში

$$(e/m)a_0^{-1}F_{kl} \equiv \mathcal{F}_{kl}, \quad (3.3.4)$$

განტოლებათა სისტემა (3.3.3) მიიღებს უფრო მარტივ სახეს:

$$\mathcal{F}_{kl}\beta^l = \alpha_k, \quad \mathcal{F}_{kl}\alpha^l = \beta_k, \quad (3.3.5)$$

რაც უფრო დეტალურად ჩაიწერება შემდეგნაირად::

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}_{0\nu}\beta_\nu &= \alpha_0, & \mathcal{F}_{\mu 0}\beta_0 - \mathcal{F}_{\mu\nu}\beta_\nu &= \alpha_\mu, \\ -\mathcal{F}_{0\nu}\alpha_\nu &= \beta_0, & \mathcal{F}_{\mu 0}\alpha_0 - \mathcal{F}_{\mu\nu}\alpha_\nu &= \beta_\mu. \end{aligned} \quad (3.3.5')$$

რამდენადაც განტოლებები (3.3.5), რომლებსაც აკმაყოფილებს 4-ტენზორი $\mathcal{F}_{kl}$, შეიცავს მხოლოდ 4-ვექტორებს α_k და β_k , ბუნებრივია ვეძებოთ $\mathcal{F}_{kl}$ როგორც ამ ვექტორების კომბინაცია. $\mathcal{F}_{kl}$ ტენზორის ანტისიმეტრიულობის გათვალისწინებით, ავირჩიოთ

$$\mathcal{F}_{kl} = C_1(\alpha_k\beta_l - \beta_k\alpha_l) + C_2\varepsilon_{klmn}\alpha^m\beta^n, \quad (3.3.6)$$

სადაც C_1 და C_2 არის 4-კოორდინატების ჯერ განუსაზღვრელი (სადიებელი) ფუნქციები. ცხადია, მამრავლი C_1 უნდა იყოს ლორენც-სკალარი, ხოლო C_2 – ლორენც-ფსევდო-სკალარი. შევიტანოთ (3.3.6) განტოლებებში (3.3.5) და გავითვალისწინოთ ზოგადი თანაფარდობები (3.1.15), (3.1.20) და (3.1.21). მივიღებთ:

$$C_1(\alpha_k \beta_l - \beta_k \alpha_l) \beta^l + C_2 \varepsilon_{klmn} \alpha^m \beta^n \beta^l = \alpha_k \Rightarrow C_1 \alpha_k = \alpha_k,$$

$$C_1(\alpha_k \beta_l - \beta_k \alpha_l) \alpha^l + C_2 \varepsilon_{klmn} \alpha^m \beta^n \alpha^l = \beta_k \Rightarrow C_1 \beta_k = \beta_k.$$

ამრიგად, განტოლებები (3.3.5) გვაძლევს $C_1=1$, ხოლო მამრავლი $C_2=C(t, x_1, x_2, x_3)$ რჩება განუსაზღვრელი. ამრიგად (აღნიშვნების შესამოკლებლად აღარ ვწერთ ინდექსს C_2 კოეფიციენტთან), გვაქვს გამოსახულება

$$\mathcal{F}_{kl} = \alpha_k \beta_l - \beta_k \alpha_l + C \varepsilon_{klmn} \alpha^m \beta^n. \quad (3.3.7)$$

(3.3.4) აღნიშვნების გათვალისწინებით, (3.3.7) გამოსახულებიდან ვპოულობთ ელექტრული და მაგნიტური ველების დამახულობებს (როგორც ჩვეულებრივ, მივიჩნევთ, რომ $F_{0\nu} = E_\nu$, $F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} H^\lambda = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda} H_\lambda$, $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$, იხ. [7], §23, და $\alpha_k = (\alpha_0, -\vec{\alpha})$, $\beta_k = (\beta_0, -\vec{\beta})$):

$$\vec{E} = (ma_0 / e) (\beta_0 \vec{\alpha} - \alpha_0 \vec{\beta} + C \vec{\beta} \times \vec{\alpha}),$$

$$\vec{H} = (ma_0 / e) (\vec{\beta} \times \vec{\alpha} - C (\beta_0 \vec{\alpha} - \alpha_0 \vec{\beta})). \quad (3.3.8)$$

ლემა 3-ის გათვალისწინებით, (3.4.8) შეიძლება გადავწეროთ უფრო ჩვეული სახით:

$$\vec{E} = (m/e) \gamma (\vec{\omega} - \omega_0 \vec{v} + C \vec{v} \times \vec{\omega}) = (m/e) \gamma^3 (\vec{a} + C \vec{v} \times \vec{a}),$$

$$\vec{H} = (m/e) \gamma (\vec{v} \times \vec{\omega} - C (\vec{\omega} - \omega_0 \vec{v})) = (m/e) \gamma^3 (\vec{v} \times \vec{a} - C \vec{a}) \quad (3.3.8')$$

(გავიხსენოთ, რომ $\omega_0 = \gamma^4 \vec{a} \cdot \vec{v}$, $\vec{\omega} = \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}$).

(3.3.8), (3.3.8') ფორმულებიდან, პირველ ყოვლისა, ვხედავთ, რომ თუ $a_0 = 0$, მაშინ

$\vec{E} = \vec{H} = 0$. ეს შედეგი ფიზიკურად საკვებით ნათელია და ბუნებრივი.

მეორე მოსაზრება ეხება მუხტზე მოქმედ ლორენცის ძალას:

$$\vec{F}_L = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}) = m\gamma (\vec{\omega} - \omega_0 \vec{v} + C \vec{v} \times \vec{\omega} + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) - C \vec{v} \times \vec{\omega}) =$$

$$= m\gamma (\vec{\omega} (1 - \vec{v}^2) + \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{\omega} - \omega_0)) = m\gamma \vec{\omega} (1 - \vec{v}^2) = m\gamma^{-1} \vec{\omega} = m\gamma (\vec{a} + \gamma^2 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}) \quad (3.3.9)$$

(გავიხსენოთ, რომ $\vec{F}_L$ განსხვავდება 4-ძალის სივრცული ნაწილისგან γ -ფაქტორით).

ამრიგად, ლორენცის ძალა, რომელიც მოქმედებს (3.1.1) პირობის თანახმად მოძრავ მუხტზე, ტრაექტორიის არც ერთ წერტილში არ არის დამოკიდებული განუსაზღვრელ ფსევდოსკალარულ ფუნქციაზე $C = C(t, x_1, x_2, x_3)$.

იმ შეზღუდვების მოსაძებნად, რომლებიც ედება $C(t, x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციას, გამოვიყენოთ მაქსველის განტოლებები, რომლებიც ჩვენს შემთხვევაში უნდა იყოს ერთგვაროვანი:

$$\varepsilon^{klmn} \partial_l F_{mn} = 0, \quad \partial_l F^{lk} = 0. \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (3.3.10)$$

რადგან მოძრავი მუხტის ტრაექტორიის წერტილებში არ გვაქვს სხვა მუხტები და დენები.

(3.3.10) განტოლებებში (3.3.7) გამოსახულების შეტანით და (3.3.4) აღნიშვნების გათვალისწინებით, მივღებთ:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{klmn}\varepsilon_{mnij}\alpha^i\beta^j\partial_l C &= 0, \\ \varepsilon^{klmn}\alpha_m\beta_n\partial_l C &= 0, \\ (k &= 0, 1, 2, 3)\end{aligned}$$

რაც, ცხადი გამარტივებების შემდეგ (იხ., მაგ., [7], §6), შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით (აქ და ქვემოთ აღნიშნულია $(\partial/\partial x^0)C \equiv \partial_t C$):

$$(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \cdot \nabla C = 0, \quad (\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta})\partial_t C + (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \nabla C = 0; \quad (3.3.11)$$

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \nabla C = 0, \quad (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})\partial_t C - (\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \times \nabla C = 0. \quad (3.3.12)$$

დავუშვათ, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq 0$. მაშინ, ლემა 2 – ის თანახმად, (3.3.11) და (3.3.12) პირველი განტოლებებიდან მივიღებთ (სივრცული საკოორდინატო ღერძები არჩეულია (3.2.17) საბაზისო ვექტორების გასწვრივ: $Ox \parallel \vec{e}_1$, $Oy \parallel \vec{e}_2$, $Oz \parallel \vec{e}_3$):

$$\nabla C = \vec{e}_2\partial_y C, \quad \partial_x C = \partial_z C = 0 \Rightarrow C = C(t, y). \quad (3.3.13)$$

ამ შედეგების შეტანა (3.3.11), (3.3.12) მეორე განტოლებებში და ლემა 2 – ის კიდევ ერთხელ გამოყენება მოგვცემს განტოლებებს:

$$\begin{aligned}|\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}| \vec{e}_1\partial_t C + |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) \partial_y C &= 0; \\ |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| \vec{e}_3\partial_t C - |\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}| (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \partial_y C &= 0.\end{aligned} \quad (3.3.14)$$

თანახმად (3.2.19) თანაფარდობებისა, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_1$. ამიტომ (3.3.14) სისტემა დაიყვანება ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემაზე $\partial_t C$ და $\partial_y C$ ცვლადების მიმართ:

$$\begin{aligned}|\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}| \partial_t C - |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| \partial_y C &= 0, \\ |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| \partial_t C - |\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}| \partial_y C &= 0.\end{aligned} \quad (3.3.15)$$

(3.2.18) პირობების თანახმად, (3.3.15) სისტემას აქვს არანულოვანი დეტერმინანტი:

$$\begin{bmatrix} |\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}| & -|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| \\ |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| & -|\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}| \end{bmatrix} = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 - (\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta})^2 = -1,$$

და, მაშასადამე, აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნები

$$\partial_t C = \partial_y C = 0. \quad (3.3.16)$$

ეს შედეგი (3.3.13) – თან ერთად გვიჩვენებს, რომ თუ $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \neq 0$, მაშინ განუსაზღვრელი მამრავლი C (3.3.7) ფორმულაში არის მუდმივი და, მაშასადამე ტენზორი (3.3.7) (იხ. აგრეთვე (3.3.8)) აღწერს სტატიკურ ერთგვაროვან ველს.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$. როგორც ნაჩვენებია ზემოთ, ამ შემთხვევაში მართებულია თანაფარდობები (3.2.24)–(3.2.26). ამიტომ (3.3.8) ფორმულები მოგვცემს:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (m/e)a_0(\beta_0^2 - \alpha_0^2)\vec{\beta}/\alpha_0 = \pm(\vec{\beta}/|\vec{\beta}|)(ma_0/e) = \pm(\vec{v}/|\vec{v}|)(m/e)a_0, \\ \vec{H} &= -C\vec{E}.\end{aligned}\quad (3.3.17)$$

ამრიგად, (3.2.7) თანახმად, გვაქვს მუხტის წრფივი მოძრაობა ერთგვაროვანი ელექტროსტატიკური ველისა და მისი კოლინეარული მაგნიტური ველის გასწვრივ. ცხადია, ნაწილაკის სიჩქარის პარალელური მაგნიტური ველი არ ახდენს გავლენას ნაწილაკის მოძრაობაზე. ამიტომ ეს შემთხვევა დაიყვანება მუხტის მოძრაობაზე ერთგვაროვან ელექტროსტატიკურ ველში. ვაჩვენოთ, რომ მაგნიტური ველი (3.3.17) ფორმულაში სტატიკურია და ერთგვაროვანი, ისევე, როგორც ელექტრული.

მართლაც, თუ $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$, მაშინ ზოგადი განტოლებები (3.3.11) და (3.3.12) გვაძლევს შემდეგ შეზღუდვებს C კოეფიციენტზე:

$$(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \cdot \nabla C = 0, \quad (\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \partial_i C = 0 \quad (\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \times \nabla C = 0.$$

რამდენადაც, (3.2.18) თანახმად, $(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \neq 0$, ეს შეზღუდვები მოგვცემს

$$\nabla C = \partial_i C = 0 \Leftrightarrow C = \text{const.}$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაშიც ელექტრომაგნიტური ველი სტატიკურია და ერთგვაროვანი.

დამტკიცების დასასრულებლად ვაჩვენოთ [67], რომ აგებული ამონახსნი ერთადერთია (ანუ არ არსებობს (3.3.7) ამონახსნისგან განსხვავებული ელექტრომაგნიტური ველი, რომელიც უზრუნველყოფს მუხტის მოძრაობას (3.1.1) პირობის შესაბამისად).

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო: დავუშვათ, არსებობს დამატებითი ელექტრომაგნიტური ველი F_{kl}' ისეთი, რომ მოძრაობის განტოლება

$$e(F_{kl} + F_{kl}')u^l = m\dot{u}_k \quad (3.3.18)$$

მართებული იყოს (3.3.1) განტოლებასთან ერთად, სადაც ტენზორი F_{kl} გამოისახება (3.3.7) ფორმულით (ნებისმიერი მუდმივი C კოეფიციენტით). მაშინ F_{kl}' ტენზორისთვის გვექნება:

$$(e/m)F_{kl}'u^l = 0 \Leftrightarrow F_{k0}'u^0 + F_{k\lambda}'u^\lambda = 0 \quad (k=0,1,2,3) \quad (3.3.19)$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}' \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{როცა } k=0), \quad (3.3.20)$$

$$\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{H}' = 0 \quad (\text{როცა } k=1,2,3) \quad (3.3.20')$$

ცხადია, (3.3.20) გამომდინარეობს (3.3.20')-იდან. ამავე პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{E}' \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{E}' \cdot \vec{H}' = 0.$$

მსგავსად (3.3.5) განტოლებისა, (3.3.19)-იდან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha^k \mathcal{F}_{kl}' \beta^l = 0. \quad (\forall \mathcal{G} = a_0 \tau) \quad (3.3.21)$$

ხაზგასასმელია, რომ ტოლობები (3.3.19) – (3.3.21) სამართლიანია τ საკუთარი დროის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. ამიტომ დასაშვებია მათი გაწარმოება:

$$\vec{E}' = -\vec{v} \times \vec{H}' \Rightarrow \partial_t \vec{E}' = -\vec{v} \times \partial_t \vec{H}' - \partial_t \vec{v} \times \vec{H}'.$$

აქედან, მაქსველის განტოლებების გამოყენებით, მივიღებთ

$$\text{rot } \vec{H}' = -\vec{v} \times \partial_t \vec{H}' - \partial_t \vec{v} \times \vec{H}'. \quad (3.3.22)$$

დამუხტული ნაწილაკის ტრაექტორიის ნებისმიერ P წერტილში შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\vec{v} = \vec{v}_p = 0$ (თანახმად შენიშვნა 7-ისა ასეთი ათვლის სისტემა შეგვიძლია ავირჩიოთ ზოგადობის შეუზღუდავად) და მაშინ თანაფარდობა (3.3.20) მოგვცემს

$$\vec{E}'_p = -\vec{v}_p \times \vec{H}'_p = 0, \quad (3.3.23)$$

ხოლო (3.3.22) პირობიდან მივიღებთ

$$\text{rot } \vec{H}'_p = -\partial_t \vec{v}_p \times \vec{H}'_p. \quad (3.3.24)$$

რამდენადაც, (3.1.16) და (3.1.17) – ის თანახმად,

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v}_p &= \partial_t (\gamma^{-1} \vec{u})_p = -\gamma_p (\vec{v}_p \cdot \partial_t \vec{v}_p) \vec{u}_p + \gamma_p^{-1} \partial_t \vec{u}_p = \\ &= \gamma_p^{-1} (\partial_\theta \vec{u})_p (\partial_t \theta)_p = (\gamma_p^{-1} \vec{\alpha})(\gamma_p^{-1} a_0) = a_0 \vec{\alpha} \neq 0, \end{aligned}$$

(3.3.24) გვაძლევს განტოლებას

$$\text{rot } \vec{H}'_p = -a_0 \vec{\alpha} \times \vec{H}'_p. \quad (3.3.25)$$

ჩვენს მიერ არჩეულ ათვლის სისტემაში $\vec{\alpha} = (1, 0, 0)$, $\vec{H}'_p = (0, H'_y, 0)$. ამიტომ (3.3.25) ლეზულობს შემდეგ სახეს:

$$(d/dx) H'_y = -a_0 H'_y \Rightarrow H'_y = H'_0 \exp(-a_0 x).$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან ვხედავთ, რომ ყველგან სასრული ველი გვექნება მხოლოდ თუ ინტეგრების მუდმივა $H'_0 = 0$. ამიტომ

$$H'_y = 0 \Rightarrow \vec{H}'_p = 0. \quad (3.3.26)$$

ამრიგად, (3.3.23) და (3.3.26) თანახმად, არჩეულ ათვლის სისტემაში ტრაექტორიის ნებისმიერ P წერტილში გვაქვს $(F_{kl}')_p = 0$. რამდენადაც ეს პირობა ლორენც-კოვარიანტულია, ის მართებული იქნება ნებისმიერ ინერციულ ათვლის სისტემაში. თეორემა დამტკიცებულია.

ნაშრომში [36] შედარებულია (3.3.8) და (3.3.17) ველების ინვარიანტები. (3.3.8) ველისთვის გვაქვს:

$$\begin{aligned}\vec{E}^2 - \vec{H}^2 &= (ma_0/e)^2(1-C^2) \left[(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta})^2 - (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 \right], \\ (\vec{E} \cdot \vec{H})^2 &= (ma_0/e)^4(-C)^2 \left[(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta})^2 - (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2 \right]^2.\end{aligned}\quad (3.3.27)$$

ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეში (3.2.18) ფორმულების გამოვიყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\vec{E}^2 - \vec{H}^2 &= (ma_0/e)^2(1-C^2), \\ (\vec{E} \cdot \vec{H})^2 &= (ma_0/e)^4 C^2.\end{aligned}\quad (3.3.28)$$

ცხადია, იგივე შედეგი მიიღება (3.3.17) ველებისთვის, ანუ არ აქვს მნიშვნელობა, კოლინეარულია თუ არა ვექტორები $\vec{\alpha}$ და $\vec{\beta}$. ასეთი თანხვედრის მიზეზი არის სწორედ ის, რომ შესაძლებელია გადასვლა სპეციალურ ინერციულ ათვლის სისტემაში, სადაც ელექტრული და მაგნიტური ველები ხდება პარალელური. ნაშრომში [36] ნაჩვენებია, რომ ამ გადასვლისთვის საჭირო ლორენცის გარდაქმნის პარამეტრი – სიჩქარე $\vec{V}$ – ემთხვევა თეორემა 1 თანახმად გამოთვლილს (იხ. ფორმულა (3.2.23)), რომელიც გახდის კოლინეარულს ვექტორებს $\vec{\alpha}$ და $\vec{\beta}$. (3.3.17). მართლაც, როგორც ცნობილია (იხ., მაგ., [25], ამოცანა 10.62), სიჩქარე $\vec{V}$, რომელიც პარალელურს გახდის ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს, გამოისახება ფორმულით (არაცალსახად):

$$\vec{V} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{2(\vec{E} \times \vec{H})^2} \left[\vec{E}^2 + \vec{H}^2 - \left((\vec{E}^2 - \vec{H}^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{H})^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (3.3.29)$$

აქედან, (3.3.28) და (3.3.8) ფორმულების გამოყენებით და (3.2.18) გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta}) \times (\vec{\beta} \times \vec{\alpha})(C^2+1)}{2(\beta_0\vec{\alpha} - \alpha_0\vec{\beta})^2(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})^2(C^2+1)^2} \left[(2\beta_0^2 - 2\alpha_0^2 - 1)(C^2+1) - \left((1-C^2)^2 + 4C^2 \right)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{\beta_0\vec{\beta} - \alpha_0\vec{\alpha}}{2(\beta_0^2 - \alpha_0^2)(\beta_0^2 - \alpha_0^2 - 1)} \left[(2\beta_0^2 - 2\alpha_0^2 - 1) - 1 \right] = \frac{\beta_0\vec{\beta} - \alpha_0\vec{\alpha}}{\beta_0^2 - \alpha_0^2}.\end{aligned}\quad (3.3.30)$$

რაც ემთხვევა (3.2.23) შედეგს.

ამრიგად, ლორენცის გარდაქმნა (3.3.30) პარამეტრით კოლინეარულს გახდის ოთხივე 3-ვექტორს: $\vec{\alpha}'$, $\vec{\beta}'$, $\vec{E}$ და $\vec{H}'$ (იხ. (3.3.17)). მეტიც: შენიშვნა 6-ის თანახმად, შესაძლებელია დამატებითი ბუსტის შესრულება ამ 3-ვექტორების საერთო მიმართულებით. ასეთი ბუსტის შედეგად $\vec{E}'$ და $\vec{H}'$ ველები, ცხადია, არ შეიცვლება, ხოლო

ვექტორები $\vec{\alpha}'$ და $\vec{\beta}'$ შეიცვლის სიგრძეს. თანახმად ფორმულებისა (3.2.28) და (3.2.29), გვექნება:

$$\begin{aligned}\vec{\beta}' &\rightarrow \beta'^k = (1, 0), \\ \vec{\alpha}' &\rightarrow \alpha'^k = (0, \vec{\beta}'/\alpha'_0) = (0, \vec{\alpha}'/\beta'_0), \\ |\vec{\alpha}'| &= 1.\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

თუ Ox ღერძს მივმართავთ ამ საერთო მიმართულების გასწვრივ, (3.3.31) თანახმად, (3.3.17) ველებისთვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\vec{E}'' &= (a_0 m/e, 0, 0), \quad \vec{H}'' = (C, 0, 0). \\ (\forall C \in \mathbb{R})\end{aligned}\tag{3.3.32}$$

მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით, ნაშრომში [36] ჩამოყალიბებულია თეორემა:

თეორემა 3. დამუხტული ნაწილაკის ნებისმიერი მოძრაობა, რომელიც შეესაბამება ლორენც–აბრაჰამ–დირაკის ნულოვან ძალას (ჰიპერბოლური მოძრაობა) შესაძლებელია შევისწავლოთ ათვლის სპეციალურ ინერციულ სისტემაში, სადაც ნაწილაკი მოძრაობს წრფივად ნულოვანი საწყისი სიჩქარითა და ისეთი აჩქარებით, რომელიც გამოწვეულია ერთგვაროვანი ელექტროსტატიკური ველით, ამასთან, დასაშვებია მაგნიტური ველი ასევე სტატიკურია, ერთგვაროვანი და ელექტრული ველის კოლინეარული.

ჰიპერბოლური მოძრაობის ყველა სხვა შემთხვევა მიიღება ამ სპეციალური მოძრაობიდან ლორენცის შესაბამისი გარდაქმნით. ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია, რომელიც მიიღება ასეთი გარდაქმნის შედეგად, არის ჰიპერბოლა.

3.4. მოძრაობა მხოლოდ ელექტროსტატიკურ ერთგვაროვან ველში

შედარებისთვის, ნაშრომში [36] განხილულია მუხტის მოძრაობა მხოლოდ ელექტროსტატიკურ ერთგვაროვან ველში $\vec{E} = \text{const.}$ ამ კლასიკური ამოცანის განხილვა მრავალ სახელმძღვანელოში შესრულებულია არასრულად, ლორენც–აბრაჰამ–დირაკის ძალის გაუთვალისწინებლად. მაგალითად, მოძრაობის განტოლებას (იხ., მაგ., [7] §20) წერენ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= (e/m)\vec{E} \cdot \vec{u}, \quad \dot{\vec{u}} = (e/m)\vec{E}u_0 \quad \Rightarrow \\ \ddot{u}_0 &= (e/m)^2 \vec{E}^2 u_0, \quad \ddot{\vec{u}} = (e/m)^2 \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{u}).\end{aligned}$$

თუ დავშლით სიჩქარის 4-ვექტორის სივრცულ ნაწილს მდგენელებად:

$$\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}, \quad \vec{u}_{\parallel} = \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{u})/\vec{E}^2, \quad \vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel},$$

და გავითვალისწინებთ, რომ

$$-\omega^2 = a_0^2 = (e/m)^2 \vec{E}^2, \quad (\vec{a} \neq \vec{a}_0) \quad \vec{E} \cdot \vec{u} = \vec{E} \cdot \vec{u}_{\parallel}, \quad \vec{E} \cdot \vec{u}_{\perp} = 0,$$

მაშინ მოძრაობის ზემოთმოცემული განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 &= (e/m)^2 \vec{E}^2 u_0, \\ \ddot{u}_{\parallel} &= (e/m)^2 \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{u}) = (e/m)^2 \vec{E}^2 \vec{u}_{\parallel}, \\ \dot{\vec{u}}_{\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

ამ განტოლებების ცნობილი ამონახსნი (იხ., მაგ., [25], თავი IX, §2, ამოცანა № 692) იძლევა მოძრაობის კანონებს

$$\begin{aligned} x_0 &= \vec{a}_0 \cdot \vec{\beta} \frac{\cosh \vartheta - 1}{a_0^2} + \beta_0 \frac{\sinh \vartheta}{a_0}, & \vec{x} &= \vec{\beta} \tau + \vec{a}_0 \beta_0 \frac{\cosh \vartheta - 1}{a_0^2} + \vec{a}_0 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\beta}) \frac{\sinh \vartheta - \vartheta}{a_0^3}, \\ u_0 &= \vec{a}_0 \cdot \vec{\beta} \frac{\sinh \vartheta}{a_0} + \beta_0 \cosh \vartheta, & \vec{u} &= \vec{\beta} + \vec{a}_0 \beta_0 \frac{\sinh \vartheta}{a_0} + \vec{a}_0 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\beta}) \frac{\cosh \vartheta - 1}{a_0^2}, \\ \omega_0 &= \vec{a}_0 \cdot \vec{\beta} \cosh \vartheta + a_0 \beta_0 \sinh \vartheta, & \vec{\omega} &= \vec{a}_0 \beta_0 \cosh \vartheta + \vec{a}_0 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\beta}) \frac{\sinh \vartheta}{a_0}, \\ & & (\vartheta = a_0 \tau) & \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

რომლებიც არ ემთხვევა სრულად (3.1.14), (3.1.16) და (3.1.17) ფორმულებს. კერძოდ, (3.1.17) და (3.1.18)-გან განსხვავებით, (3.4.2) ფორმულებიდან ვღებულობთ თანაფარდობებს

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_0 &= a_0 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\beta} \sinh \vartheta + \beta_0 a_0 \cosh \vartheta) \quad (= a_0^2 u_0), \\ \dot{\vec{\omega}} &= \vec{a}_0 (\beta_0 a_0 \sinh \vartheta + \vec{a}_0 \cdot \vec{\beta} \cosh \vartheta) \quad (= a_0^2 \vec{u} - a_0^2 \vec{\beta}_{\perp}), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

სადაც $\vec{\beta}_{\perp} = \vec{u}_{\perp}$ განმარტებულია (3.2.2) თანახმად. ამრიგად, (3.4.2) აკმაყოფილებს (3.1.11) განტოლებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\vec{\beta}_{\perp} = 0, \quad \vec{a}_0 (\vec{a}_0 \cdot \vec{x}) = \vec{a}_0^2 \vec{x}, \quad \vec{x}_{\perp} = 0. \quad (a_0 \neq 0) \quad (3.4.4)$$

თუ პირობა (3.4.4) არ არის შესრულებული, მაშინ გამოსხივების რეაქციის ძალა (LAD ძალა) არ არის ნულის ტოლი.

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება [36]:

დებულება 5. გამოსხივების რეაქციის ძალა – LAD ძალა – რომელიც მოქმედებს ერთგვაროვან ელექტროსტატიკურ ველში მოძრავ მუხტზე, ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მუხტის მოძრაობის მიმართულება ემთხვევა ველის მიმართულებას.

ცხადია, ასეთ შემთხვევაში მუხტის ტრაექტორია წრფივია (მოცემულ ათვლის სისტემაში) და მოძრაობის კანონი აიწერება (3.2.10) განტოლებით.

შენიშვნა 8. რამდენადაც ზოგად შემთხვევაში LAD ძალა არის

$$F_e^i = (2/3)e^2 (g^{ik} - u^i u^k) \dot{\omega}_k = (2/3)e^2 \left[\dot{\omega}^i - u^i (u_0 \dot{\omega}_0 - \vec{u} \cdot \dot{\vec{\omega}}) \right],$$

(3.4.2) მოძრაობის შემთხვევაში მივიღებთ (ათვლის იმ სისტემაში, სადაც ელექტრო-სტატიკური ველის დამაბულობაა $\vec{E} = \vec{a}_0 m/e = \text{const}$):

$$F_e^i = (F_e^0, \vec{F}_e),$$

$$\begin{aligned} F_e^0 &= (2/3)e^2 (\dot{\omega}^0 - u^0 a_0^2 (1 + \vec{u}_\perp^2)) = (2/3)e^2 a_0^2 (u^0 - u^0 (1 + \vec{u}_\perp^2)) = \\ &= -(2/3)e^2 a_0^2 u^0 \vec{u}_\perp^2, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= (2/3)e^2 (\dot{\vec{\omega}} - \vec{u} a_0^2 (1 + \vec{u}_\perp^2)) = (2/3)e^2 a_0^2 (\vec{u} - \vec{u}_\perp - \vec{u} (1 + \vec{u}_\perp^2)) = \\ &= -(2/3)e^2 a_0^2 (\vec{u}_\perp + \vec{u} \vec{u}_\perp^2). \end{aligned} \quad (3.4.5')$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ძალა აკმაყოფილებს აუცილებელ ზოგად პირობას

$$\begin{aligned} F_e^i u_i &= -(2/3)e^2 a_0^2 [\vec{u}_\perp^2 u_0^2 - (\vec{u}_\perp + \vec{u}_\perp^2 \vec{u}) \cdot \vec{u}] = \\ &= -(2/3)e^2 a_0^2 \vec{u}_\perp^2 (u_0^2 - 1 - \vec{u}^2) = 0. \end{aligned}$$

(3.4.5) – (3.4.5') ფორმულებით მოცემული შედეგები კიდევ ერთხელ გვიჩვენებს, რომ სამართლიანია შემდეგი დებულება:

დებულება 6. თუ $\vec{\beta}_\perp \neq 0$, მაშინ $\vec{\beta}_\parallel$ მდგენელის გასწვრივ, გარდა ერთგვაროვანი ელექტროსტატიკური $\vec{E} = \text{const}$ ველისა, მოქმედებს ძალა $\vec{F}_{e\parallel} = -(2/3)e^2 a_0^2 \vec{u}_\parallel \vec{u}_\perp^2$, და მოძრაობა ველის გასწვრივაც კი აღარ არის კიპერბოლური.

თავი 3-ის ძირითადი შედეგები

დისერტაციის ამ თავში ნაჩვენებია, რომ

1. მოძრაობა, რომლისთვისაც 4-აჩქარების წარმოებული ნულია, $\dot{\omega}_k = 0$, არის თანაბარი და ასეთი მოძრაობისას გამოსხივებას, ცხადია, ადგილი არ აქვს;

2. ნაპოვნია და ცხადი სახით აღწერილია არათანაბარი მოძრაობის რეჟიმი, რომლის დროსაც გამოსხივების რეაქციის ძალა ნულია. ნაჩვენებია, რომ ეს რეჟიმი ერთადერთია;

3. ნაპოვნია რეჟიმის შესაბამისი ტრაექტორია (ჰიპერბოლა) ზოგად შემთხვევაში და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი.

4. ნაჩვენებია, რომ არსებობს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, სადაც ეს ტრაექტორია ხდება წრფივი, ამასთან, ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე ამ სისტემის მიმართ ნულია. ნაპოვნია ასეთ სისტემაში ლორენცგარდაქმნისათვის საჭირო სიჩქარე, რომელიც წარმოდგენილია ნაწილაკის მოძრაობის საწყისი პირობებით ლაბორატორიული სისტემის მიმართ.

5. ნაპოვნია გარეშე ელექტრომაგნიტური ველის უზოგადესი სახე, რომელიც უზრუნველყოფს ნაწილაკის მოძრაობას ჩვენთვის საინტერესო რეჟიმში. ნაჩვენებია, რომ ეს ველი უნდა იყოს სტატიკური და ერთგვაროვანი. სამიუბელი ველი ცხადი სახით წარმოდგენილია ნაწილაკის მოძრაობის საწყისი სიჩქარითა და აჩქარებით, როგორც ზოგად შემთხვევაში, ასევე ზემოთაღწერილი სპეციალური ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ.

6. ნაჩვენებია, რომ მხოლოდ ერთგვაროვან ელექტროსტატიკურ ველში მოძრაობისას ზოგად შემთხვევაში გამოსხივების რეაქციის ძალა არ ნულდება.

მიღებული თანაფარდობები (იხ. ფორმულები (3.4.5) – (3.4.5')) მიუთითებს, რომ 4-სიჩქარის განივი მდგენელი $\vec{u}_\perp$ შეიძლება გამოყენებული იყოს მცირე პარამეტრად ასეთი მოძრაობის შესაბამისი მოძრაობის განტოლების ამოსახსნელად რიცხვითი ან ანალიზური მიახლოებითი მეთოდებით.

ჩვენი აზრით, საინტერესო იქნებოდა იმის შესწავლა, თუ რამდენად იცვლება გამოსხივებული ენერგია-იმპულსის ინტენსივობა ჰიპერბოლური რეჟიმისგან მცირე გადახრებისას. საინტერესოა აგრეთვე ნაწილაკის საკუთარი მაგნიტური მომენტის გავლენის დადგენა ამ თავში განხილულ მოვლენებზე.

თავი 4. მათემატიკური შედეგები

წინამდებარე თავში თავმოყრილია ზოგიერთი მათემატიკური შედეგი, რომელთა დამტკიცება და გამოყენება დაგჭირდა დისერტაციაში დასმული ამოცანების განხილვისას. ამასთან, ზოგიერთ ამ შედეგს დამოუკიდებელი ღირებულებაც გააჩნია. ქვეთავი 4.1 ეძღვნება შერეული წარმოებულების გადასმადობის შესახებ შვარცის ცნობილი თეორემის [46] განზოგადებას, რაც საჭირო გახდა მაგნიტურ მომენტთან დაკავშირებული დენის სიმკვრივის გამოთვლისას. ქვეთავში 4.2 აღწერილია ჩვენ მიერ შემუშავებული ალგორითმი ალგებრული განტოლების განსხვავებულ ფესვებს შორის მინიმალური მანძილის, მინიმალური და მაქსიმალური ფესვების მნიშვნელობების (სპექტრის სიგანე) სიმბოლური შეფასებისთვის, როდესაც ფესვების ჯერადობა ნებისმიერია; დასაბუთებულია ამ ალგორითმით გამოთვლების სწრაფი კრებადობა.

ამ თავში წარმოდგენილი მასალა გამოქვეყნებულია შრომებში [37], [56] მოხსენებულია კონფერენციებზე [4]–[7], [9]–[13] (იხ. კონფერენციების ჩამონათვალი გვ. 11-ზე); სემინარებზე თსუ-ში, სტუ-ში, ფიზიკის ინტ-ში, ვეკუას გმი-ში.

4.1. შვარცის თეორემის განზოგადება

a) ცნობილია, რომ დამოუკიდებელი ცვლადებით კერძო წარმოებულების გადასმადობის სამართლიანობისთვის საკმარისია ფუნქციის მეორე წარმოებულების უწყვეტობა (იხ., მაგ., [46]). მონოგრაფიაში [46] მოყვანილია კონტრმაგალითი, როდესაც წყვეტილი მეორე წარმოებულების მქონე ფუნქციისთვის ასეთი გადასმა დასაშვები არ არის. ამასთან, ფიზიკური ამოცანების მთელი რიგი, კერძოდ, წერტილოვან (იდეალიზებულ) ობიექტებთან დაკავშირებული ამოცანები, აიწერება წყვეტილი ფუნქციებით (დირაკის ფუნქციითა და მისი წარმოებულებით). ამდენად, საინტერესოა გარკვევა, შესაძლებელია თუ არა შვარცის თეორემის პირობების გაფართოება.

თეორემა. ვთქვათ, ფუნქცია $F(x)=F(x_1, \dots, x_N)$ განსაზღვრულია და აქვს პირველი წარმოებულები $\partial_{x_k} F(x)$, $k=1, 2, \dots, N$, ევკლიდური $\mathbb{E}^N$ სივრცის ჩაკეტილ D არეში, $D \subset \mathbb{E}^N$, $N=2, 3, \dots$; ვთქვათ, ამ ფუნქციის მეორე წარმოებულები განსაზღვრულია და უწყვეტია D არის ყველა წერტილში, გარდა, შესაძლოა, შიგა წერტილისა

$$P = x^{(P)} = (x^{(P)}_1, x^{(P)}_2, \dots, x^{(P)}_N) \in D, \quad P \notin \partial D$$

(∂D აღნიშნავს D არის სასრულო საზღვარს), სადაც ფუნქციას აქვს იზოლირებული სინგულარობა (მაგალითად, k რიგის პოლუსი, $k \in \mathbb{N}$). მაშინ $F(x)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$ და $\partial_\beta = \partial / \partial x_\beta$, $\alpha, \beta = \overline{1, N}$, გადასმადია, ანუ

$$\partial_\alpha \partial_\beta F(x) - \partial_\beta \partial_\alpha F(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in D. \quad (4.1.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ინტეგრალი ნებისმიერ $D_1 \subseteq D \subset \mathbb{E}^N$ არეზე, რომელიც შეიცავს ფუნქციის სინგულარობის P წერტილს, როგორც შიგა წერტილს. თეორემის პირობების თანახმად, შესაძლებელია გაუსის ინტეგრალური თეორემის (იხ., მაგ., [46]) გამოყენება ნებისმიერი ჩაკეტილი $D_1 \subseteq D$ არის საზღვარზე, თუ $P \notin \partial D_1$:

$$\oint_{\partial D_1} [\partial_\alpha \partial_\beta F(x)] n_\lambda(x) d^{N-1}x = \int_{D_1} \partial_\lambda [\partial_\alpha \partial_\beta F(x)] d^N x, \quad (4.1.2)$$

სადაც $n_\lambda(x)$, $\lambda = \overline{1, N}$, აღნიშნავს ∂D_1 საზღვრის ელემენტის (ჰიპერპედაპირის) გარე ნორმალის λ კომპონენტს ინტეგრების წერტილში. შევნიშნოთ, რომ მარცხენა მხარეში ინტეგრალი არსებობს თეორემის პირობების თანახმად, ამიტომ, გაუსის თეორემის შესაბამისად, არსებობს და მისი ტოლია ინტეგრალი მარჯვენა მხარეშიც.

ამავე მოსაზრებებით, გვაქვს

$$\oint_{\partial D_1} [\partial_\beta \partial_\alpha F(x)] n_\lambda(x) d^{N-1}x = \int_{D_1} \partial_\lambda [\partial_\beta \partial_\alpha F(x)] d^N x. \quad (4.1.3)$$

რამდენადაც (4.1.2), (4.1.3) ტოლობების მარცხენა მხარეში წარმოებულები გადასმადია:

$$\partial_\beta \partial_\alpha F(x) - \partial_\alpha \partial_\beta F(x) = 0, \quad x \in \partial D_1, \quad (4.1.4)$$

მარჯვენა მხარეში მდგარი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია ყველგან D_1 არეში, ნებისმიერად არჩეული $D_1 \subseteq D$ არისათვის, ამიტომ

$$\partial_\lambda (\partial_\alpha \partial_\beta F(x) - \partial_\beta \partial_\alpha F(x)) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}. \quad (4.1.5)$$

ამრიგად, ნებისმიერი x წერტილისთვის D_1 არეში გვაქვს

$$\partial_\alpha \partial_\beta F(x) - \partial_\beta \partial_\alpha F(x) = \text{const}. \quad (4.1.6)$$

მაგრამ (4.1.4) თანახმად, ∂D_1 საზღვრის წერტილებში $x \in \partial D_1$ ეს მუდმივი $= 0$. ამიტომ, D_1 არის ნებისმიერ წერტილშიც

$$\partial_\alpha \partial_\beta F(x) - \partial_\beta \partial_\alpha F(x) = 0,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

ჩვენი მიზნებისთვის დამტკიცებული თეორემის გამოსაყენებლად საჭიროა მისი გაფართოება შემთხვევისთვის, როდესაც (4.1.1) ფორმულაში გვაქვს დამოკიდებულება არა მხოლოდ სივრცულ (ეკლიდურ) კოორდინატებზე, არამედ დროზეც.

შედეგი. თეორემა სამართლიანი რჩება მაშინაც, როცა ფუნქცია F , გარდა სივრცული კოორდინატებისა $x \in D$, დამოკიდებულია კიდევ რაიმე t პარამეტრზე (მაგ., დროზე):

$$\partial_\alpha \partial_\beta F(t, x) - \partial_\beta \partial_\alpha F(t, x) = 0, \quad x \in D. \quad (4.1.7)$$

დამტკიცება. ამ შემთხვევაში, (4.1.6) ნაცვლად გვექნება:

$$\partial_\alpha \partial_\beta F(x) - \partial_\beta \partial_\alpha F(x) = f(t),$$

სადაც $f(t)$ არ არის დამოკიდებული კოორდინატებზე $(x_1, \dots, x_N)$. მეორე მხრივ, ყველგან, გარდა, შესაძლოა, P პოლუსისა,

$$f(t) = 0. \quad (4.1.8)$$

ამიტომ (4.1.8) სამართლიანია ყველგან D არეში.

შენიშვნა 1. მარტივია თეორემის განზოგადება $F(x)$ ფუნქციისთვის, რომელსაც D არეში პოლუსების სასრული (უფრო ზოგადად, თვლადი) რაოდენობა აქვს.

შენიშვნა 2. თეორემა არ არის მართებული, თუ ვერ მოიძებნება D_1 არის ისეთი საზღვარი ∂D_1 , რომლის ყველა წერტილში ფუნქციის მეორე წარმოებული უწყვეტია. მაგალითად, თუ ფუნქციას აქვს უსასრულო ჭრილი.

b) მონოგრაფიაში [46], n°191, განხილულია კონტრმაგალითი: ფუნქცია

$$F(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad F(0, 0) = 0, \quad (4.1.9)$$

უწყვეტია და წარმოებადი ყველგან, გარდა კოორდინატთა სათავისა, სადაც მისი მეორე წარმოებული არ არის განმარტებული (უფრო ზუსტად, მეორე წარმოებულს კოორდინატთა სათავეში არ აქვს ზღვარი). მართლაც, გადავწეროთ ფუნქცია (4.1.9) და მისი წარმოებულები პოლარულ (r, φ) კოორდინატებში. გვექნება:

$$F(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = f(r, \varphi) = 4^{-1} r^2 \sin 4\varphi, \quad f(0, 0) = 0; \quad (4.1.10)$$

რამდენადაც

$$\begin{aligned} \partial_x F(x, y) &= \cos \varphi \partial_r f(r, \varphi) - r^{-1} \sin \varphi \partial_\varphi f(r, \varphi), \\ \partial_y F(x, y) &= \sin \varphi \partial_r f(r, \varphi) + r^{-1} \cos \varphi \partial_\varphi f(r, \varphi) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

და

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_x F(x, y) &= 2^{-1} \sin 2\varphi \partial_{r^2}^2 f - r^{-2} \left(\cos 2\varphi \partial_\varphi f + 2^{-1} \sin 2\varphi \left(r \partial_r f + \partial_{\varphi^2}^2 f \right) \right) + \\ &\quad + r^{-1} \left(\cos^2 \varphi \partial_\varphi \partial_r f - \sin^2 \varphi \partial_r \partial_\varphi f \right), \\ \partial_x \partial_y F(x, y) &= 2^{-1} \sin 2\varphi \partial_{r^2}^2 f - r^{-2} \left(\cos 2\varphi \partial_\varphi f + 2^{-1} \sin 2\varphi \left(r \partial_r f + \partial_{\varphi^2}^2 f \right) \right) + \\ &\quad + r^{-1} \left(\cos^2 \varphi \partial_r \partial_\varphi f - \sin^2 \varphi \partial_\varphi \partial_r f \right), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

გვაქვს

$$\partial_x \partial_y F(x, y) - \partial_y \partial_x F(x, y) = r^{-1} [\partial_\phi \partial_r f(r, \phi) - \partial_r \partial_\phi f(r, \phi)], \quad r \neq 0. \quad (4.1.13)$$

განსახილველ კონტრმაგალითში მივიღებთ:

$$f(r, \phi) = 4^{-1} r^2 \sin 4\phi \Rightarrow \partial_r f(r, \phi) = 2^{-1} r \sin 4\phi \Rightarrow \partial_\phi \partial_r f(r, \phi) = 2r \cos 4\phi, \\ \partial_\phi f(r, \phi) = r^2 \cos 4\phi \Rightarrow \partial_r \partial_\phi f(r, \phi) = 2r \cos 4\phi. \quad (4.1.14)$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\partial_x \partial_y F(x, y) - \partial_y \partial_x F(x, y) = 0, \quad r \neq 0. \quad (4.1.15)$$

გარდა ამისა, (4.1.13) და (4.1.14) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $r = 0$ წერტილში არსებობს ზღვარი

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} (\partial_\phi \partial_r f(r, \phi) - \partial_r \partial_\phi f(r, \phi)) = 0, \quad (4.1.16)$$

თუმცა თითოეული შესაკრების ზღვარი

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \partial_\phi \partial_r f(r, \phi) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \partial_r \partial_\phi f(r, \phi) = 2 \cos 4\phi$$

კოორდინატთა სათავეში, ცხადია, არ არის განმარტებული.

ცხადია, (x, y) სიბრტყეში ნებისმიერი შეკრული წირით აღებული ინტეგრალი

$$\oint_{\partial D_1} (\partial_x \partial_y F(x, y) - \partial_y \partial_x F(x, y)) n_\lambda d\Gamma = 0, \quad (r = 0 \notin \partial D_1)$$

და, გარდა ამისა, (4.1.15) საფუძველზე გვექნება

$$\oint_{\partial D_1} (\partial_x \partial_y F(x, y) - \partial_y \partial_x F(x, y)) G(x, y) n_\lambda d\Gamma = 0 \quad (4.1.17)$$

ნებისმიერი, ინტეგრების ∂D_1 არეში უწყვეტი $G(x, y)$ ფუნქციისთვის. ეს ნიშნავს, რომ (4.1.15) სამართლიანია ყველგან D_1 არეში სინგულარობის წერტილის ჩათვლით (**სუსტი აზრით** (იხ., მაგ., [47], [48], [49]), ანუ წარმოადგენს (სინგულარული) განზოგადებული ფუნქციისთვის ჩაწერილ გამოსახულებას. სწორედ ასეთი აზრით უნდა განვიხილოთ წყვეტილი, კერძოდ, პოლუსის მქონე ფუნქციის წარმოებულებიც წყვეტის წერტილებში, მაგალითად, წინა თავში განხილული გამოსახულება

$$\square \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\mu^{kl}(t')}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x^l} \square \frac{\mu^{kl}(t')}{\rho}$$

(აქ $\square \equiv \partial_n \partial^n = \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$ დალამბერის ოპერატორია).

4.2. განტოლების განსხვავებულ ფესვთა შორის მინიმალური მანძილის სიმბოლური შეფასების მეთოდი

a) ნაშრომებში [51], [55 a, b], [56] ნამდვილი ფესვების მქონე n ხარისხის პოლინომი $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ განიხილება, როგორც ერმიტული ოპერატორის (მეორე რანგის ტენზორის) მახასიათებელი პოლინომი. ამასთან ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები – მახასიათებელი პოლინომის ფესვები (რომლებიც ყველა ნამდვილია ოპერატორის ერმიტულობის გამო) – საზოგადოდ, გადაგვარებულია. ცნობილია კრიტერიუმები [52], [53], რომელთა გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ პოლინომის ერთმანეთისგან განსხვავებული ფესვების რაოდენობა. ცნობილია პოლინომის ფესვების მიახლოებითი გამოთვლის ეფექტური რიცხვითი მეთოდებიც [54]. ამ მეთოდების გამოყენებისას საჭირო მანქანური დრო არსებითად არის დამოკიდებული მიახლოების სიზუსტეზე და გამოთვლების შესრულების ბიჯზე. ამიტომ გამოთვლით ამოცანაში სასარგებლოა წინასწარ ვიცოდეთ, რა მინიმალური მანძილით არის დაშორებული სხვადასხვა ფესვები. ამ ინფორმაციაზე დაყრდნობით მოსახერხებელია გამოთვლების ბიჯის ოპტიმალური არჩევა, რაც გამოთვლების შედეგს საიმედოს ხდის და მნიშვნელოვნად ამცირებს გამოთვლებისთვის საჭირო მანქანურ დროს, აგრეთვე, დიდი მნიშვნელობა აქვს რიცხვითი გამოთვლების სტაბილურობისათვის.

ნაშრომებში [51], [55 a, b], [56] ჩვენ მიერ შემოთავაზებულია ალგორითმი, რომელიც განსხვავებულ ფესვებს შორის მინიმალურ მანძილს გამოსახავს პოლინომის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქციების სწრაფად კრებადი მიმდევრობით. ამასთან, მოხერხდა ერმიტული ოპერატორის სპექტრის უფრო დეტალური აღწერა, კერძოდ, მახასიათებელი პოლინომის ფაქტორიზება ისე, რომ ერთნაირი ჯერადობის მქონე ფესვები ერთ მამრავლში აღმოჩნდა თავმოყრილი. ჩვენი ნაშრომის ეს შედეგი საშუალებას იძლევა მნიშვნელოვნად დავწიოთ ალგებრული განტოლების ხარისხი და დავიყვანოთ პოლინომის ფესვების პოვნის კლასიკური ამოცანა მხოლოდ მარტივი ფესვების მქონე პოლინომის – მოცემული ოპერატორის მინიმალური პოლინომის [50a,b], [51] შესწავლაზე. ნაშრომებში [56], ნაჩვენებია, რომ მოცემული ოპერატორის მინიმალური პოლინომი მოიძებნება ფორმულით

$$P_m(x) = D_m^{-1} \det \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{m-1} & t_m \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & t_{m+1} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ t_{m-1} & t_m & \dots & t_{2m-2} & t_{2m-1} \\ 1 & x & \dots & x^{m-1} & x^m \end{bmatrix} = D_m^{-1} \det \begin{bmatrix} H_m & (\mathbf{t})^T \\ \mathbf{x} & x^m \end{bmatrix}, \quad (4.2.1)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები

$$t_k = \sum_{l=1}^m r_l p_l^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.2)$$

ამასთან

$$p_1 < p_2 < \dots < p_m$$

არის მოცემული ერმიტული ოპერატორის ყველა სხვადასხვა საკუთარი მნიშვნელობა,

ხოლო $r_1, r_2, \dots, r_m$ ($r_i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^m r_i = n$) – შესაბამისი გადაგვარებები; H_k არის k რიგის,

$k = 0, 1, \dots$, ჰანკელის მატრიცა [57], [58]

$$H_k(P_n) = H_k = [t_{i+j-2}]_1^k, \quad (4.2.3)$$

მისი დეტერმინანტი

$$D_k = \det H_k = \begin{cases} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \left\{ r_{i_1} \dots r_{i_k} \prod_{1 \leq j < l \leq k} (p_{i_j} - p_{i_l})^2 \right\} > 0, & 1 \leq k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

რაციონალურად გამოისახება [53] მოცემული $P_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებით ნიუტონის ცნობილი ფორმულების [54], [58] საშუალებით;

$$\mathbf{p}_i \equiv [p_i^{k-1}]_{k=1, \dots, m} = [1, p_i, \dots, p_i^{m-1}] \quad (4.2.5)$$

აღნიშნავს ერთსტრიქონიან მატრიცას, $\mathbf{p}_i^T$ – მის ტრანსპონირებულს (სვეტს).

შევნიშნოთ, რომ ფორმულები (4.2.2) და (4.2.4) იძლევა $P_n(x)$ პოლინომის განსხვავებული ფესვების m რაოდენობის პოვნის შესაძლებლობას მისი კოეფიციენტების გამოყენებით. ცნობილი მსგავსი შედეგები (იხ., მაგ, [54] და იქ ჩამოთვლილი წყაროები) არ შეიცავს ინფორმაციას პოლინომის ფესვთა ჯერადობის შესახებ, რაც ცხადად არის მითითებული ჩვენს (4.2.2) და (4.2.4). ფორმულებში.

ნაშრომში [56] გამოყვანილია ფორმულა

$$r_i^{-1} = \langle \mathbf{p}_i H_m^{-1} \mathbf{p}_i^T \rangle, \quad (4.2.6)$$

რომელიც $P_n(x)$ პოლინომის p_i ფესვის r_i ჯერადობას გამოსახავს (4.2.3) მატრიცის ($k = m$ შემთხვევისთვის) შებრუნებულის H_m^{-1} საშუალებით (ფრჩხილი $\langle \rangle$ აღნიშნავს ვექტორ-სტრიქონოსა და ვექტორ-სვეტის სკალარულ ნამრავლს), აქვე ნაჩვენებია, რომ მინიმალური პოლინომი გამოისახება ფორმულით

$$P_m(x) = x^m + \sum_{k=1}^m x^{m-k} (-1)^k \sigma_k, \quad (4.2.7)$$

ხოლო მისი კოეფიციენტები – $P_n(x)$ პოლინომის განსხვავებული p_k ფესვების ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციები

$$\sigma_1 = \sum_{1 \leq j \leq m} p_j, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq m} p_j p_k, \dots, \quad \sigma_m = p_1 p_2 \dots p_m, \quad (4.2.8)$$

ფორმულებით

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} p_{i_1} \dots p_{i_k} = D_m^{-1} H \begin{pmatrix} m+1 \\ m-k+1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.9)$$

სადაც $H \begin{pmatrix} m+1 \\ m-k+1 \end{pmatrix}$ აღნიშნავს მინორს, რომელიც რჩება (4.2.1) ფორმულის დეტერმინანტში $(m+1)$ -სტრიქონისა და $(m-k+1)$ -სვეტის ამოშლის შედეგად, $k = \overline{1, m}$. ყველა ეს მინორი, ისევე, როგორც კოეფიციენტი D_m^{-1} , (4.2.2) ჯამების პოლინომური ფუნქციებია და ამიტომ პოლინომურად გამოისახება მოცემული $P_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებით.

$P_n(x)$ პოლინომის p_k (ერთმანეთისგან განსხვავებულ) ფესვთა შორის მინიმალური მანძილის მოსაძებნად ნაშრომში [51], [55 a, b], [56] შემოღებულია ფუნქცია

$$Z(\varepsilon) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon^2}. \quad (4.2.10)$$

თუ ε არჩეულია ისე, რომ შესრულებულია პირობა

$$0 \leq \varepsilon < \min |p_i - p_j| \equiv \mu, \quad (4.2.11)$$

მაშინ

$$Z(\varepsilon) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon^2} = \frac{1}{\mu^2 - \varepsilon^2} + (\text{დადებითი წევრები})$$

და ამიტომ

$$Z(\varepsilon) > \frac{1}{\mu^2 - \varepsilon^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^2 > (Z(\varepsilon))^{-1} + \varepsilon^2. \quad (4.2.12)$$

მაშასადამე, შეგვიძლია ავაგოთ მკაცრად ზრდადი შემოსაზღვრული მიმდევრობა

$$0 = \varepsilon_0^2 < \varepsilon_1^2 < \varepsilon_2^2 < \dots < \varepsilon_k^2 < \mu^2, \quad (4.2.13)$$

სადაც

$$\varepsilon_k^2 = (Z(\varepsilon_{k-1}))^{-1} + \varepsilon_{k-1}^2 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon_{k-1}^2} \right)^{-1} + \varepsilon_{k-1}^2, \quad k=1, 2, \dots \quad (4.2.14)$$

შემოსაზღვრული ზრდადი მიმდევრობა (4.2.13), ცხადია, იკრიბება, ამასთან

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \varepsilon_\infty, \quad 0 < \varepsilon_\infty \leq \mu. \quad (4.2.15)$$

(4.2.15) ზღვრის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (4.2.14) რეკურენტული ფორმულით: როცა $k \rightarrow \infty$ ამ ფორმულის ორივე მხარეში, ცხადია, გვექნება

$$\varepsilon_\infty^2 \equiv \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon_\infty^2} \right)^{-1} + \varepsilon_\infty^2. \quad (4.2.16)$$

(4.2.15) თანახმად, $\varepsilon_\infty \leq \mu < \infty$, ამიტომ (4.2.16) მოგვცემს

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon_\infty^2} \right)^{-1} = 0, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon_\infty^2} \rightarrow \infty.$$

მაშასადამე, ამ ჯამში ერთი შესაკრები მაინც უსასრულოა – ერთ წილადს მაინც აქვს მნიშვნელში 0. რამდენადაც

$$0 < \varepsilon_\infty \leq \mu \equiv \min |p_i - p_j|,$$

უნდა დავასკვნათ, რომ

$$\varepsilon_\infty = \mu = \min |p_i - p_j|. \quad (4.2.17)$$

აღწერილი ალგორითმის რეალიზაციის შესაძლებლობა არსებითად ეყრდნობა ჩვენს [56] ნაშრომში დამტკიცებულ ლემას:

ლემა 1. პარამეტრები ε_k , $0 \leq \varepsilon_k < \mu$, $k=0, 1, 2, \dots$, გამოისახება $P_n(x)$ პოლინომის ცნობილი კოეფიციენტებით.

ლემის დამტკიცება. რადგანაც (4.2.13) მიმდევრობა იწყება $\varepsilon_0=0$ წევრით, (4.2.14) თანაფარდობიდან ვღებულობთ

$$\varepsilon_1^2 = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m} (p_i - p_j)^{-2} \right]^{-1} < \mu^2. \quad (4.2.18)$$

(4.2.18) ფორმულაში შემავალი ჯამი, ცხადია, არის $p_1, \dots, p_m$ ფესვების სიმეტრიული ფუნქცია. ამიტომ, თანახმად სიმეტრიული ფუნქციების შესახებ ძირითადი თეორემისა [60], [61], ის რაციონალურად გამოისახება (4.2.8) ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციებით – მინიმალური $P_m(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებით და, მაშასადამე, თეორემა 1-ის ძალით, მოცემული $P_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებით. ამრიგად, ლემა მართებულია მიმდევრობის ε_1 წევრისთვის. ამის შემდეგ ლემა მტკიცდება ინდუქციით ნებისმიერი (სასრული ნომრის მქონე) ε_k , $k = 2, 3, \dots$ წევრისთვის.

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

ლემა 2. *მოცემული $P_n(x)$ პოლინომის განსვავებულ (ნამდვილ) ფესვთა შორის მინიმალური მანძილი შეიძლება ვიპოვოთ, როგორც ზღვარი ზრდადი შემოსაზღვრული მიმდევრობისა, რომლის წევრებიც პოლინომის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქციებია.*

შენიშვნა. კარგად არის ცნობილი, რომ უსასრულო მიმდევრობის ზღვარი, საზოგადოდ, არ ეკუთვნის იმავე სიმრავლეს, რომელსაც ეკუთვნის მიმდევრობის თითოეული წევრი. ჩვენი აზრით, საინტერესოა შემდეგი ამოცანა:

ამოცანა. არსებობს თუ არა, და თუ არსებობს, მაშინ რა კლასს ეკუთვნის პოლინომი, რომლისთვისაც (4.2.13) მიმდევრობის ზღვარი – პოლინომის განსვავებულ ფესვთა შორის მინიმალური მანძილი – რაციონალურად გამოისახება პოლინომის კოეფიციენტებით.

b) ნაშრომში [56] ასევე ნაჩვენებია, რომ იგივე ალგორითმით შეიძლება შეფასდეს ერმიტული ოპერატორის სპექტრის სიგანე – ნებისმიერი სიზუსტით მოიძებნოს მანძილი ოპერატორის მინიმალურ და მაქსიმალურ საკუთარ მნიშვნელობებს შორის და ასევე მოიძებნოს თვით ეს მნიშვნელობები. კერძოდ, დამტკიცდეს შემდეგი

ლემა 2. *განვიხილოთ $\omega = \{i_1, \dots, i_l \mid l \leq m\} \subset \{1, \dots, m \mid m \leq n\}$ ნატურალური რიცხვების ქვესიმრავლე და $f(x_1, \dots, x_l) - l \leq m$ ნამდვილი ცვლადების რაციონალური ფუნქცია, სიმეტრიული ცვლადების ნებისმიერი გადასმის მიმართ და შემოსაზღვრული, როცა $x_j \in [p_1, p_m]$, $j = \overline{1, l}$:*

$$\min\{f(x_1, \dots, x_l) \mid x_j \in [p_1, p_m], j = \overline{1, l}\} = a,$$

$$\max\{f(x_1, \dots, x_l) \mid x_j \in [p_1, p_m], j = \overline{1, l}\} = b.$$

მაშინ რეკურენტული თანაფარდობა

$$\left[\sum_{\omega_i \in \{1, m\}} \frac{1}{f(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}) - c_k} \right]^{-1} + c_k = c_{k+1}, \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.2.19)$$

სადაც c_0 არის მოცემული ნამდვილი რიცხვი, გვაძლევს მიმდევრობას $\{c_k | k \in \mathbb{N}\}$, რომელსა აქვს შემდეგი თვისებები:

a) თუ $c_0 < a = \min\{f(x_1, \dots, x_l) | x_j \in [p_1, p_m], j=1, \dots, l\}$, მაშინ აგებული მიმდევრობა მკაცრად

ზრდადია და შემოსაზღვრულია ზემოდან:

$$c_0 < c_1 < \dots < c_k < c_{k+1} < a, \quad (4.2.20)$$

ამასთან,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \equiv c_\infty = a; \quad (4.2.21)$$

b) თუ $c_0 > b = \max\{f(x_1, \dots, x_l) | x_j \in [p_1, p_m], j=1, \dots, l\}$, მიმდევრობა მკაცრად კლებადია

და შემოსაზღვრულია ქვემოდან:

$$c_0 > c_1 > \dots > c_k > c_{k+1} > b, \quad (4.2.20')$$

ამასთან,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \equiv c_\infty = b; \quad (4.2.21')$$

c) რეკურენტული (4.2.19) თანაფარდობით განსაზღვრული ყველა ნამდვილი c_k , $k \in \mathbb{N}$, რაციონალურად გამოისახება c_0 მუდმივითა და $P_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებით.

დამტკიცება. ლემის a) და b) დებულებები მტკიცდება პირდაპირი გამოთვლით, მსგავსად (4.2.12)–(4.2.14) და (4.2.17) თანაფარდობებისა. ამასთან, არსებითია, ლემის რომელი პირობის შესაბამისად – a) თუ b) – არის არჩეული მუდმივა c_0 .

ლემის c) დებულებების დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ გამოსახულება

$$\sum_{\omega_i \in \{1, m\}} [f(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}) - c_0]^{-1}$$

არის $P_m(x)$ პოლინომის ფესვების რაციონალური სიმეტრიული ფუნქცია და რაციონალურად არის დამოკიდებული c_0 მუდმივზე. მაშინ, თანახმად 1 თეორემისა, c_k მიმდევრობის c_1 წევრი, რომელიც განმარტებულია ფორმულით

$$c_1 = \left[\sum_{\omega_i \in \{1, m\}} \frac{1}{f(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}) - c_0} \right]^{-1} + c_0,$$

არის $P_m(x)$ პოლინომის ფესვების რაციონალური სიმეტრიული ფუნქცია და ასევე რაციონალურად არის დამოკიდებული c_0 მუდმივზე. ამის შემდეგ, c_k მიმდევრობის დანარჩენი წევრებისთვის ლემის $c)$ დებულება მტკიცდება ინდუქციით.

შედეგი. თუ c_0 მუდმივი გამოსახულია როგორც $P_m(x)$ პოლინომის ფესვების რაციონალური სიმეტრიული ფუნქცია, მაშინ (4.2.20) და (4.2.20') მიმდევრობების ყველა წევრი არის $P_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქცია.

შენიშვნა. მიმდევრობა (4.2.13), რომლითაც გამოვსახეთ მინიმალური მანძილი $P_m(x)$ პოლინომის ფესვებს შორის, მიიღება დამტკიცებული ლემიდან, თუ ავირჩევთ $f = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ და $c_0 = 0$.

c) მაგალითი 1. განვიხილოთ ჰანკელის მატრიცა

$$H_2(P_m) = [s_{i+j-2}]_{i,j=1,2},$$

სადაც $s_k = \sum_{i=1}^m p_i^{k-1}$, $k = \overline{1, m}$, არის $P_m(x)$ პოლინომის ფესვების ნიუტონისეული ჯამები. ამ

მატრიცის დეტერმინანტი

$$D_2(P_m) = s_0 s_2 - s_1^2 = m(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_1^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (p_j - p_i)^2$$

მოიძებნება (4.2.4) ფორმულიდან, თუ იქ ავიღებთ $r_i = 1, i = \overline{1, m}$. ცხადია,

$$D_2(P_m) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (p_j - p_i)^2 > \max\{(p_j - p_i)^2 | i, j = \overline{1, m}\} \equiv M^2.$$

ამიტომ, თანახმად 2 ლემისა, შეიძლება ავაგოთ კლებადი, ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა

$$\eta_0 = D_2(P_m) > \eta_1 > \dots > \eta_k > \eta_{k+1} > M,$$

სადაც

$$\eta_k^2 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \eta_{k-1}^2} \right)^{-1} + \eta_{k-1}^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

და

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k \equiv \eta_\infty = M. \quad (4.2.22)$$

ამრიგად, ვპოულობთ $P_m(x)$ (და მასთან ერთად $P_n(x)$) პოლინომის სპექტრის სიგანეს.

განვიხილოთ $P_m(x)$ პოლინომის ფესვების საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{p}(P_m) = s_1 / m = m^{-1} \sum_{i=1}^m p_i.$$

ცხადია, რომ

$$\min\{p_i | i=\overline{1,m}\} > \bar{p}(P_m) - \sqrt{D_2(P_m)} \quad (4.2.23')$$

$$\max\{p_i | i=\overline{1,m}\} < \bar{p}(P_m) + \sqrt{D_2(P_m)}. \quad (4.2.23'')$$

ავირჩიოთ (4.2.19) ფორმულაში $f = f(x) = x$. მაშინ

$$a = \min\{f(x) | x \in [p_1, p_m]\} = p_1,$$

$$b = \max\{f(x) | x \in [p_1, p_m]\} = p_m.$$

ამიტომ, თუ c_0 მუდმივს ავირჩევთ როგორც $c_0 = \bar{p}(P_m) - \sqrt{D_2(P_m)}$ (შესაბამისად, როგორც $c_0 = \bar{p}(P_m) + \sqrt{D_2(P_m)}$), მაშინ, ლემა 2-ის თანახმად, $P_m(x)$ (და მასთან ერთად $P_n(x)$) პოლინომის მინიმალური ფესვი p_1 (მაქსიმალური ფესვი p_m) შეიძლება ვიპოვოთ ზრდადი (კლებადი) და ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან (4.2.20) ((4.2.20')). რამდენადაც (4.2.23') და (4.2.23'') უტოლობების მარჯვენა მხარეში გვაქვს $P_m(x)$ (და მასთან ერთად $P_n(x)$) პოლინომის ფესვების სიმეტრიული ფუნქციები, ვასკვნით [56], რომ მართებულია შემდეგი დებულებები:

დებულება 4. მკაცრად მონოტონური მიმდევრობები

$$c_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} < a \quad (4.2.24')$$

$$c_0 = b_0 > b_1 > \dots > b_k > b_{k+1} > b. \quad (4.2.24'')$$

სადაც

$$a_{k+1} = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{p_i - a_k} \right)^{-1} + a_k, \quad b_{k+1} = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{p_i - b_k} \right)^{-1} + b_k,$$

შედგენილია $P_m(x)$ პოლინომის ფესვების სიმეტრიული ფუნქციებით და ამიტომ რაციონალურად გამოისახება $P_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებით.

დებულება 5. $P_m(x)$ პოლინომის ყველა ფესვი $p_1 < \dots < p_m$ ($P_n(x)$ პოლინომის ყველა განსხვავებული ფესვი) განლაგებულია ღია ინტერვალში $]a_i, b_k[$, სადაც a_i და b_k არის (4.2.24') და (4.2.24'') რომელიმე წევრები.

d) ნაშრომში [56] შეფასებულია (4.2.13) მიმდევრობის კრებადობის სიჩქარე, როცა $k \rightarrow \infty$ და ნაჩვენებია, რომ ყველა $k = 0, 1, \dots$ წევრისთვის მართებულია უტოლობები

$$\mu^2 - \varepsilon_k^2 > \varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_k^2 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 - \varepsilon_k^2} \right)^{-1} \geq \left(\sum_{l=1}^{m-1} \frac{m-l}{l^2 \mu^2 - \varepsilon_k^2} \right)^{-1}. \quad (4.2.19)$$

ჯამი (4.2.19) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შეესაბამება პოლინომს

$$W_m(x) = \prod_{l=0}^{m-1} (x - p_l - \mu l), \quad \mu > 0, \quad (4.2.20)$$

რომელსაც აქვს ეკვიდისტანტური ფესვები, μ მანძილით მეზობელ ფესვთა შორის. ნაშრომში [56] ამ პოლინომს ვუწოდეთ უილკინსონის განზოგადებული პოლინომი (WGP). WGP დაიყვანება უილკინსონის ცნობილ პოლინომზე [62], თუ $\mu = 1$, $p_1 = 1$, $p_m = m$. (4.2.19) შეფასების თანახმად, WGP (4.2.20) აქვს (4.2.13) მიმდევრობის კრებადობის მინიმალური სიჩქარე ყველა სხვა (იგივე μ -ს მქონე) პოლინომთან შედარებით. მართლაც, WGP-თვის (4.2.19) ფორმულის მარჯვენა მხარეში გვაქვს ტოლობა. ამიტომ

$$\varepsilon_{k+1}^2(m) - \varepsilon_k^2(m) = \mu^2 \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \frac{m-l}{l^2 - \mu^{-2} \varepsilon_k^2} \right\}^{-1}. \quad (4.2.21)$$

ამ ფორმულაზე დაყრდნობით ნაშრომში [56] ნაპოვნია შეფასება

$$\left(\frac{m-2}{m-1} \right)^k < 1 - \varepsilon_k^2(m) / \mu^2 \leq [1 - A(m)]^k, \quad (4.2.22)$$

სადაც m აღნიშნავს მინიმალური პოლინომის ხარისხს და

$$A(m) = \frac{(m-1)}{(m-1)^2 + m(m-2)B(m)} < 1, \quad (4.2.23)$$

$$\begin{aligned} B(m) &= \sum_{l=2}^{m-1} \frac{m-l}{m-1} \frac{1}{l^2-1} = \frac{1}{m-1} \left(\frac{3}{4}m - \frac{1}{4} + \frac{1}{2m} - \sum_{l=1}^m l^{-1} \right) = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{m-1} \left(1 + \frac{1}{2m} + \sum_{l=3}^{m-1} l^{-1} \right). \quad (m \geq 3) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

მაშასადამე, გამოთვლების δ სიზუსტის ($0 < \delta \ll 1$) მისაღწევად საკმარისი ნაბიჯების რაოდენობისთვის გვაქვს შეფასება

$$\frac{\ln \delta}{\ln(m-2) - \ln(m-1)} < k < \frac{\ln \delta}{\ln[1 - A(m)]}. \quad (4.2.25)$$

$m \gg 1$ პოლინომისთვის გვაქვს

$$\ln(m-2) - \ln(m-1) \approx -\frac{1}{m-2},$$

$$B(m) \rightarrow \frac{3}{4} - 0,$$

$$\ln[1 - A(m)] \approx -A(m) \approx -\frac{1}{m-1} \frac{1}{1 + \frac{m(m-2)}{(m-1)^2} \frac{3}{4}} \approx -\frac{4}{7(m-1)},$$

და შეფასება (4.2.25) შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც

$$(m-2)\ln \delta^{-1} < k < \frac{7}{4}(m-1)\ln \delta^{-1}. \quad (4.2.26)$$

დაბალი ხარისხის პოლინომებისთვის [56] ნაშრომში შესრულებული გამოთვლები გვადლევს, მაგალითად:

$$m=3, \quad B(3)=\frac{1}{6}, \quad A(3)=\frac{2}{4+3B(3)}=\frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln \delta^{-1}}{\ln 2} < k < \frac{\ln \delta^{-1}}{\ln(9/5)}.$$

$$m=4, \quad B(4)=\frac{19}{72}\left(\approx \frac{1}{4}\right), \quad A(4)=\frac{3}{9+8B(4)}=\frac{27}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln \delta^{-1}}{\ln(3/2)} < k < \frac{\ln \delta^{-1}}{\ln(100/73)}.$$

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ შემოთავაზებული ალგორითმი საკმაოდ სწრაფია: სიზუსტის რამდენიმე რიგით გასაუმჯობესებლად საჭიროა მხოლოდ რამდენიმე დამატებითი იტერაცია.

თავი 4-ის დასკვნები

1. განზოგადებულია შვარცის თეორემა დამოუკიდებელი ცვლადებით შერეული კერძო წარმოებულების გადასმადობის შესახებ, იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქციას აქვს იზოლირებული სინგულარობები. სინგულარულ წერტილებში წარმოებულების ტოლობა განიხილება სუსტი აზრით (სინგულარული განზოგადებული ფუნქციების სიმრავლეში);

2. ნაპოვნია რეკურენტული თანაფარდობა, რომელიც შესაძლებლობას იძლევა ვიპოვოთ ალგებრული განტოლების ფესვების განლაგება ნამდვილ ღერძზე, კერძოდ: განსხვავებული ფესვების რაოდენობა, მინიმალური მანძილი განსხვავებულ ვფესვებს შორის, მინიმალური და მაქსიმალური ფესვების (სპექტრის სიგანე) მნიშვნელობები. ყველა ეს სიდიდე სიმბოლურად გამოისახება პოლინომის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქციებით რაგინდ კარგი მიახლოებით.

3. შეფასებულია რეკურენტულად აგებული მიმდევრობების კრებადობის სიჩქარე და ნაჩვენებია, რომ ეს მიმდევრობები სწრაფად (ექსპონენციალურად) იკრიბება.

დასკვნები და შემდგომი კვლევის პერსპექტივა

შესრულებული კვლევის შედეგად მიღწეულია დასახული მიზანი:

1. გამოთვლილია მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალი და ველის ტენზორი, ნებისმიერად მოძრავი ნაწილაკისთვის. შედეგი წარმოდგენილია როგორც კოვარიანტული ფორმით, ასევე 3-განზომილებიანი ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობების გამოყენებით;
2. გამოყვანილია ფორმულა მაგნიტური მომენტით შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველის შესაბამისი 4-დენის სიმკვრივისთვის. ნაჩვენებია, რომ შესაბამისი „მაგნიტური“ მუხტი ნულის ტოლია;
3. რადიაციული ველების განხილვის საფუძველზე ნაპოვნია მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე მუხტისმიერად მოძრავი ნაწილაკის მიერ გამოსხივებული ენერგიის სიმკვრივე, ნაკადი და შესაბამისი ინტეგრალური სიდიდეები; გამოთვლილია გამოსხივების რეაქციის შესაბამისი ძალის ნაწილი;
4. აგებულია მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე მუხტისმიერად მოძრავ ნაწილაკზე მოქმედი გამოსხივების რეაქციის ძალის უზოგადესი სახე;
5. ნაჩვენებია, რომ **მაგნიტური მომენტის გათვალისწინება საზოგადოდ არ ხსნის კლასიკური ელექტროდინამიკის პრობლემებს**, კერძოდ, ჰიპერბოლური მოძრაობის პრობლემას;
6. ნაჩვენებია, რომ მაღალ ენერგიებზე მაგნიტურ მომენტთან დაკავშირებული გამოსხივების რეაქციის ძალა უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე მუხტთან დაკავშირებული, რაც მნიშვნელოვანია ამაჩქარებლებში ნაწილაკების აჩქარების ოპტიმალური რეჟიმის ასარჩევად, აგრეთვე სინქროტრონული გამოსხივების გასაანგარიშებლად, როგორც ლაბორატორიულ კვლევებში, ასევე ასტროფიზიკური მოვლენების შესწავლისას;
7. ზოგადი სახით შესწავლილია მოძრაობა, რომლის დროსაც RR ძალა ნულის ტოლია და ნაჩვენებია, რომ ეს შესაძლებელია მხოლოდ ორ შემთხვევაში:
 - a) მოძრაობა, რომლისთვისაც 4-აჩქარების წარმოებული ნულია, არის *თანაბარი* და ასეთი მოძრაობისას გამოსხივებას, ცხადია, ადგილი არ აქვს;
 - b) არათანაბარი მოძრაობის ერთადერთი რეჟიმი, რომლის დროსაც გამოსხივების რეაქციის ძალა ნულია, ემთხვევა ჰიპერბოლურს; ნაპოვნია შესაბამისი ტრაექტორია (ზოგად შემთხვევაში ჰიპერბოლა) და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი. ნაჩვენებია, რომ არსებობს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, სადაც ეს ტრაექტორია ხდება წრფივი, ამასთან, ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე ათვლის ამ სისტემის მიმართ ნულია. ნაპოვნია ასეთ სისტემაში ლორენც-გარდაქმნისათვის საჭირო სიჩქარე, რომელიც წარმოდგენილია ნაწილაკის მოძრაობის საწყისი პირობებით ლაბორატორიული სისტემის მიმართ.

8. ნაპოვნია გარეშე ელექტრომაგნიტური ველის უზოგადესი სახე, რომელიც უზრუნველყოფს ნაწილაკის მოძრაობას ჰიპერბოლურ რეჟიმში. ნაჩვენებია, რომ ეს ველი უნდა იყოს სტატიკური და ერთგვაროვანი; ველის დამაბულობები ცხადი სახით წარმოდგენილია ნაწილაკის მოძრაობის საწყისი სიჩქარითა და აჩქარებით, როგორც ზოგად შემთხვევაში, ასევე ზემოთაღწერილი სპეციალური ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ.

9. ნაჩვენებია, რომ მხოლოდ ერთგვაროვან ელექტროსტატიკურ ველში მოძრაობისას ზოგად შემთხვევაში გამოსხივების რეაქციის ძალა არ ნულდება.

10. შემოთავაზებულია გარეშე ველის მიმართ ნაწილაკის სიჩქარის განივი მდგენელის გამოყენება, როგორც მცირე პარამეტრისა, მოძრაობის განტოლების ამოსახსნელად რიცხვითი ან ანალიზური მიახლოებითი მეთოდებით.

კვლევის პროცესში მიღებულია შემდეგი მათემატიკური შედეგები:

a) განზოგადებულია შვარცის თეორემა დამოუკიდებელი ცვლადებით შერეული კერძო წარმოებულების გადასმადობის (კომუტაციის) შესახებ, იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქციას აქვს იზოლირებული სინგულარობები. დამტკიცებულია, რომ სინგულარულ წერტილებში შერეული წარმოებულების კომუტატორი ნულის ტოლია სუსტი აზრით (სინგულარული განზოგადებული ფუნქციების სიმრავლეში). შვარცის თეორემის ამ განზოგადებამ საშუალება მოგვცა გამოგვეთვალა მაგნიტური 4-დენის სიმკვრივე;

b) შეტანილია შესწორება ვ. არნოლდის თეორემაში გადაგვარებული კვადრატული ფორმების ქვესივრცის კო-განზომილებების შესახებ ყველა კვადრატული ფორმის სივრცეში; კერძოდ, შესწორებულია დებულება ასეთი ფორმების დამოუკიდებელი ორთოგონალური ინვარიანტების რაოდენობის შესახებ. ნაჩვენებია, რომ არნოლდის მიერ მისი თეორემიდან გამოყვანილი შედეგი რჩება სამართლიანი და გამორკვეულია ამისი მიზეზი. ეს შედეგები მნიშვნელოვანია მეორე რანგის ტენზორების, (კერძოდ, მაგნიტური მომენტის 4-ტენზორის, ელექტრომაგნიტური ველის 4-ტენზორის და მათი წყვილების) დამოუკიდებელი ინვარიანტების კვლევისთვის.

c) ნაპოვნია რეკურენტული თანაფარდობა, რომელიც შესაძლებლობას იძლევა ვიპოვოთ ალგებრული განტოლების ფესვების განლაგება ნამდვილ ღერძზე, კერძოდ: განსხვავებული ფესვების რაოდენობა, მინიმალური მანძილი განსხვავებულ ფესვებს შორის, მინიმალური და მაქსიმალური ფესვების (სპექტრის სიგანე) მნიშვნელობები. ნაჩვენებია, რომ ეს სიდიდეები სიმბოლურად გამოისახება პოლინომის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქციებით რაგინდ კარგი მიახლოებით. შეფასებულია რეკურენტულად აგებული მიმდევრობების კრებადობის სიჩქარე და ნაჩვენებია, რომ ეს მიმდევრობები ექსპონენციალურად სწრაფად იკრიბება. ეს შედეგი სასარგებლო და მნიშვნელოვანია, კერძოდ, მოძრაობის განტოლებების მიახლოებითი ამონახსნების აგებისა და შესწავლისთვის.

შემდგომი კვლევების მიზანია

1. RR ძალის ზუსტი სახის დადგენა, რისთვისაც მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისთვის უნდა შესრულდეს იგივე გამოთვლები, რაც შეასრულა დირაკმა [5] მხოლოდ მუხტის მქონე ნაწილაკისთვის.

2. კლასიკურ ელექტროდინამიკაში ცნობილი თვითაჩქარების მოვლენის შესწავლა მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისთვის;

3. ჩვენი აზრით, საინტერესოა შევისწავლოთ, რამდენად იცვლება გამოსხივებული ენერგია-იმპულსის ინტენსივობა ჰიპერბოლური რეჟიმისგან მცირე გადახრებისას. საინტერესოა აგრეთვე ნაწილაკის საკუთარი მაგნიტური მომენტის გავლენის დადგენა დისერტაციის პირველ თავში განხილულ სხვა მოვლენებზეც (4/3 პრობლემა, ენერგია-იმპულსის გადატანის მოვლენები და სხვ).

4. ელექტრონის კლასიკური რადიუსის გამოყვანის რევიზია მისი სპინური და მაგნიტური მომენტების გათვალისწინებით, ასევე ელექტრონის არაელექტრომაგნიტური ბუნების ურთიერთქმედებებში (ელემენტარული ნაწილაკების თეორიის სტანდარტული მოდელის ჩარჩოებში - სუსტ ურთიერთქმედებაში) მონაწილეობის გათვალისწინებით.

5. მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის მდგრადობის საკითხის შესწავლა (ირნშოუს თეორემის ანალოგი?), სასრული ზომის ობიექტისთვის; მისი საკუთარი (ბრუნვითი, რხევითი) მოძრაობის ოპტიმალური რეჟიმის დადგენა; ასეთი ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ველის ინვარიანტების მანძილზე დამოკიდებულების შესწავლა, განსაკუთრებით, მცირე მანძილების ზღვარში.

6. ენერგია-იმპულსის გადატანის პრობლემის შესწავლა მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის მიერ ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივებისას და ასეთი ნაწილაკების მარტივი სისტემების მიერ გამოსხივებული ტალღური პაკეტების (არასტაციონარული) ინტერფერენციისას;

7. მაიორანა-დირაკის მიდგომის გამოყენება არასტაციონარული ინტერფერენციული მოვლენების აღწერისა და ინტერპრეტაციისთვის.

კვლევის ამ პროგრამის განხორციელება შესაძლებელია დისერტაციაში მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით და ჩვენს მიერ განვითარებული მიდგომებისა და მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით. მოსალოდნელი შედეგები საინტერესოა და მნიშვნელოვანია თანამედროვე და მომავალი ლაბორატორიული (მ. შ., დიდ ამაჩქარებლებზე დაგეგმილი) ექსპერიმენტებისთვის, ასევე, ასტროფიზიკური ობიექტების კვლევებისთვის.

ლიტერატურა

1. H. A. Lorentz, The Theory of Electrons, 2nd ed., Dover (1952).
2. F. Rohrlich, Classical Charged Particle, 3rd ed., World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd., 2007.
3. C. Teitelboim, Splitting of the Maxwell Tensor: Radiation Reaction without Advanced Fields, Phys.Rev. D, vol.1, 6, p.1572–1582, 1970.
4. Б. Косяков, Излучение в электродинамике и теория Янга–Миллса, УФН т. 162, 2, с. 161–176, 1992.
5. P. Dirac, Classical Theory of Radiation Electrons, Proc. Roy. Soc. (London) A167, 148 (1938).
6. R. Feynman, R. Leighton, M. Sands. “The Feynman Lectures on Physics”. v.2, Caltech, 2013 (რუს. თარგმ.: Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс. «Фейнмановские лекции по физике», т.6, гл. 28. М., “Мир”).
7. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теоретическая физика, т.2, М., «Физматлит», 2003.
8. Z. Kakushadze, On a Method of Renormalization Classical Charge Self–Energy, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1989.
9. a) Smith G., “An introduction to Classical Electromagnetic Radiation”, N – Y, Cambridge Univ. Press, 1997.
b) Smith G., Hertel Th. W., On the Transient Radiation of Energy from Simple Current Distribution and Linear Antennas // IEEE Antenas and Propagation Magazine. 2001, v. 43, No 3. p. 49–62.
10. J. Javakhishvili, I. Lomidze, “On Nonstationary Interference of Wave Pulses”, Bull. Ac. Sci. of Georgia, 1993, v.148, No 3, p. 28–31.
11. J. Javakhishvili, D. Karkashadze, I. Lomidze, “On the Transportation of Energy–momentum in Nonstationary Interference and Scattering of Electromagnetic Waves”, Proceed. of XXV General Assembly of IURS, B 9.17, Lille (France), 1997, p. 84.
12. J. Javakhishvili, et al. The Necessity of the Account of Static Fields in Nonstationary Interference of electromagnetic Packages // Bull. Ac. Sci. of Georgia, 1998, v.158, No. 2, p. 223–227.
13. E. Majorana. Scientific Papers. Unpublished. Deposited at the “Domus Galileana”. Pisa, quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16; 17, p. 83, 159.
14. J. Cronin, D. Greenberg, V. Telegdi, Graduate Problems in Physics with Solutions, University of Chicago, 1979.
15. M. Born, The statistical interpretation of quantum mechanics, Nobel Lecture, Dec.11, 1954.
16. Я. Френкель, Электродинамика вращающегося электрона, Собр. Избр. трудов, т. 2, с. 460–476, М., изд-во Акад. Наук СССР, 1958.
17. W. Panofsky, M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, Addison–Wesley Pub. Comp. Inc., Cambridge 42, Mass.
18. Lomidze I., Javakhishvili J., Karkashadze D., Relativistic Rotation and Classic Electrodynamics Validity Limit, DIPED-2005 Proceed., IEEE X Int. Seminar/Workshop, Lviv, 2005, p.122–126.
19. Ø. Grøn, Review Article. Electrodynamics of Radiating Charges, Advances in Mathematical Physics, vol. 2012, Article ID 528631, Hindawi Publishing Corporation, 29 p.
20. M. Abraham, Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes, Ann. Phys., 14, p. 236–287, 1904.
21. J. J. Thomson, On the Electric and Magnetic Effects produced by the Motion of Electrified Bodies (1881).
22. Тамм И. Е., Основы теории электричества, «Наука», 1978.
23. a) S. G. Fedosin The Integral Energy-Momentum 4-Vector and Analysis of 4/3 Problem Based on the Pressure Field and Acceleration Field. American Journal of Modern Physics, vol. 3, No.4, p. 152–167, 2014.
b) Khokonov M. Kh., Andersen J. U., Equivalence between Electromagnetic Self-energy and Self-mass [arXiv:1807.05338v3 \[physics.class-ph\]](https://arxiv.org/abs/1807.05338v3) 22 Sep 2018

24. M. Born, Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips (Wikisource transl.: The Theory of the Rigid Electron in the Kinematics of the Principle of Relativity). Ann. Phys., 335 (11) 1909, p. 1–56.
25. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. 2002, М.: НИИ, 640 с. (see also the 2nd Engl. ed. Transl. from Russian of the Problem Book in Electrodynamics, 2nd ed, 1970 by V. V. Batygin and I. N. Toptygin).
26. V. L. Ginzburg, Radiation and radiation friction force in uniformly accelerated motion of a charge, Soviet Physics Uspekhi, vol. 12, p. 565–574, 1970.
27. В. Л. Гинзбург, Теоретическая физика и астрофизика, М., «Наука», 1987.
28. В. В. Лидский, Уточненное вычисление мощности излучения заряженной частицы, совершающей гиперболическое движение, Краткие сообщения по физике ФИАН, 2009, № 2, с. 31–40.
29. a) J. Bicak, P. Krtous, Phys. Rev. Lett., **88**, 211101 (2002);
b) C. Almeida, A. Saa, Am. J. Phys., **74**(2), 154 (2006)
30. I. Lomidze, N. Chachava, Teitelboim's Splitting of the Maxwell Tensor of a Charged Particle, სსი. მათ. კავშირის IV კონფერენცია, ბათუმი 9–16. 09. 2013, Book of Abstracts, p. 101.
31. a) N. Chachava, I. Lomidze, D. Karkashadze, J. Javakhishvili, About One Contradiction in Classical Electrodynamics, Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 357, Physics, **39**, p. 115–130, 2004;
b) N. Chachava, I. Lomidze, D. Karkashadze, J. Javakhishvili, About One Contradiction in Classical Electrodynamics, JINR Communications E2–2005–180, Dubna, 2005.
32. Oppenheimer J. R. Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field, Phys. Rev. 1931, v.38. p.725–746.
33. Bogush A. A., Krylov G. G., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M., Maxwell Equations in Complex Form of Majorana–Oppenheimer Solutions with Cylindric Symmetry in Riemann S3 and Lobachevsky H3 Spaces, [arXiv:0907.0839v1](https://arxiv.org/abs/0907.0839v1)[math-ph].
34. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика. М.: «Наука», 1981, 428 с.
35. Weyl H., Zs. f. Phys., 1929, Bd 56, H. 5–6, S. 330.
36. I. Lomidze, N. Chachava, The Electromagnetic Field and Radiation Reaction Force for Point Charged Particle with Magnetic Moment, Proceedings of the XXIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2018, p. 89.
37. N. Chachava, I. Lomidze, The Electromagnetic Field and Radiation Reaction Force for Point Charged Particle with Magnetic Moment, GESJ: Physics, 2019, №1 (21), p. 60–73, <http://gesj.internet-academy.org.ge>
38. G. A. Schott, On the motion of the Lorentz electron, Philosophical Magazine, vol. 29, p. 49–69, 1915.
39. М. Лаврентьев, Б. Шабат, Методы теории функций комплексной переменной, М., «Наука» 1973.
40. a) Burn, B. J. A synchrotron model for the continuum spectrum of the Crab Nebula. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1973, 165 (4), p. 421–429;
b) D. Volpi et al., Non-thermal emission from relativistic MHD simulations of pulsar wind nebulae: from synchrotron to inverse Compton, Astronomy & Astrophysics, 2008, v. 485, 2, p. 337–349.
41. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, 9 изд., Москва, «Наука», 1968.
42. Bityutskov V. I. Bunyakovskii inequality, in Hazewinkel, Michiel (ed.), Encyclopedia of Math., Springer Science+Business Media B.V. Kluwer Academic Publishers, 2001.
43. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, 2-е изд., перераб. М.: «Наука», 1986, 760 с.
44. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Уч. пособие для вузов. 4-е изд., испр., М., «Наука», 1985, 392 с.

45. Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation, vol.1. Freeman&Co publ., 1973.
46. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1, гл.5, 191° 8-е изд., ФМЛ, 2003.
47. В. Владимиров, Уравнения математической физики. М., «Наука», 1981.
48. Б. Будаг, С. Фомин, Кратные интегралы и ряды. М., «Наука», 1965.
49. Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля, 1949.
50. а) I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Operator's Characteristic Polynomials with their Polynomial Invariants, International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 2015, July 6–10, 2015, Tbilisi, Book of Abstracts, p. 99.
 б) I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Operator's Orbits Respect to Unitary Transformations Group. Int. Workshop on Operator Theory and Operator Algebras WOAT 2016, July 5–8, 2016, Lisbon, Book of Abstracts, p. 35.
51. Lomidze I., Chachava N., Symbolic Estimation of Distances between Eigenvalues of a Hermitian Operator. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math., vol. 30, 2016, Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 66–69.
52. Jacobi C.G.J. De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. J. reine angew. Math. 1836, v. 15, p. 101–124.
53. I. Lomidze, Criteria of Unitary Equivalence of Hermitian Operators with a Degenerate Spectrum, Georgian Mathematical Journal, Vol. 3, No 2, 1991, p. 141–152.
54. Uteshev A.Yu. <http://www.pmpu.ru/vf4/algebra2/hankel>
55. а) I. Lomidze, N. Chachava, Symbolic expression for location region of real (imaginary) parts of an one-variable polynomial's roots and estimation of the minimal distance between them. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Int. of Appl. Math., v. 31, 2017, Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 91–94.
 б) I. Lomidze, N. Chachava, Symbolic estimation of distances between eigenvalues of Hermitian operator, Cornell University Library, [arXiv:1608.04989 math.CA](https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1608/1608.04989.pdf), Submitted 13 Aug., 2016; originally announced August 2016. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1608/1608.04989.pdf>
56. N. Chachava, I. Lomidze, S. Eyvakhov, Symbolic expression for location region of an one – variable polynomials roots and estimation of the minimal distance between them, Caucasian Mathematics Conference CMC II, Van, Turkey, August 22 – 24, 2017, Books of Abstracts, p. 101.
57. R. A. Horn, C. R. Johnson. Matrix Analyses, 2nd ed., Cambridge, Cambridge University Press, 2012.
58. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. AMS Chelsea Publishing: Repr. by Am. Math. Society, 2000.
59. а) I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Matrices with Their Polynomial Invariants. GMU III International Conf. Batumi, Georgia, Sept. 2 – 9, 2012, Book of Abstracts, p. 67.
 б) I. Lomidze, N. Chachava, Classification of Hermitian Matrices with Their Polynomial Invariants. The 18th Workshop on Computer Algebra, May 26 – 27, 2015, LIT JINR, Dubna, Russia. http://compalg.jinr.ru/Dubna2015/abstracts2015files/Lomidze_Chachava.pdf
60. Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, 1937 г., М.–Л., ОНТИ, 469 с. гл III.
61. Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, СМБ, Физматгиз, М., 1962, 300 с.
62. J. H. Wilkinson, The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials. Part I. Numerische Mathematik 1, (1959) p. 150–166.

63. Арнольд В. И. Математические методы классической механики, доб.10, М., «Наука», 1989, 395 с.
64. Lomidze I., Chachava N. Elaboration of the Arnold Theorem on Ellipsoids' Space Co-dimension. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Int. of Appl. Math., v.30, 2016, Tbilisi University Press, Tbilisi, p. 63-65.
65. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). В книге: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей, М., 1956, с. 399–434.
66. ილია ლომიძე. ოპერატორების უნიტარული და ორთოგონალური ინვარიანტები და მათი გამოყენება მათემატიკურ და ფიზიკურ ამოცანებში,
https://www.tsu.ge/data/file_db/library/Lomidze/2011ia_Thesis.pdf
67. N. Chachava, I. Lomidze, The Motion of the Point Charged Particle with Zero Radiation Reaction Force, Georgian Electronic Scientific Journal, GESJ: Physics, 2019, №2 (22), p. 51–67.
<http://gesj.internet-academy.org.ge/>

დამატებები

A. აჩქარებისა და მისი წარმოებული 4-ვექტორები

გამოვსახოთ 4-სიჩქარე, 4-აჩქარება და მისი წარმოებული სივრცული ვექტორების მეშვეობით:

$$u^i = \gamma(1, \vec{v}); \quad (A.1)$$

$$\omega^i = du^i / d\tau = \gamma^4 ((\vec{a}, \vec{v}), \vec{a}\gamma^{-2} + \vec{v}(\vec{a}, \vec{v})); \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^i = d\omega^i / d\tau = \gamma^5 \Big((a^2 + (\vec{a}', \vec{v})) + 4\gamma^2 (\vec{a}, \vec{v})^2, \\ \gamma^{-2} \vec{a}' + (3\vec{a}(\vec{a}, \vec{v}) + \vec{v}(\vec{a}', \vec{v}) + \vec{v}a^2) + \gamma^2 4\vec{v}(\vec{a}, \vec{v})^2 \Big] \end{aligned} \quad (A.3)$$

ცხადია, რომ

$$u^i \omega_i = 0 \Rightarrow \omega^2 + u^i \dot{\omega}_i = 0, \quad 3\dot{\omega}^i \omega_i + u^i \ddot{\omega}_i = 0, \quad 4\ddot{\omega}^i \omega_i + 3\dot{\omega}^2 + u^i \ddot{\omega}_i = 0. \quad (A.4)$$

სხეულის საკუთარ ათვლის სისტემაში:

$$\begin{aligned} u^{iPF} = (1, \vec{0}), \quad \omega^{iPF} = (0, \vec{a})^{PF}, \quad (d\omega^i / d\tau)^{PF} = (a^2, \vec{a}')^{PF}, \\ \ddot{\omega}^{iPF} = (d^2 \omega^i / d\tau^2)^{PF} = (3\vec{a} \cdot \vec{a}', 4a^2 \vec{a} + \ddot{\vec{a}})^{PF}, \\ \ddot{\omega}^{iPF} = (d^3 \omega^i / d\tau^3)^{PF} = (13a^4 + 3\dot{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \ddot{\vec{a}}, 10a^2 \dot{\vec{a}} + \ddot{\vec{a}} + 15(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{a})^{PF}, \end{aligned} \quad (A.5)$$

B. მაგნიტური მომენტის ტენზორის წარმოებულები

გამოვთვალოთ $d\mu_{ik} / d\tau$, $d^2 \mu_{ik} / d\tau^2$ და $d^3 \mu_{ik} / d\tau^3$. წინასწარ ვიპოვოთ $\vec{p}$ და $\vec{m}$ -ის წარმოებულები.

$$d\vec{p} / d\tau = (\vec{\omega} \times \vec{m}) + (\vec{u} \times \dot{\vec{m}}), \quad d^2 \vec{p} / d\tau^2 = (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{m}) + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{m}}) + (\vec{u} \times \ddot{\vec{m}}) \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} d\vec{m}(\vec{v}) / d\tau = \gamma^2 \dot{\vec{m}} + \gamma \nu^{-2} (1 - \gamma) \vec{v} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{m}}) + \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{m} - \gamma^4 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \\ + (\nu^{-2} \vec{a} (\vec{v} \cdot \vec{m}) - 2\nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{v}) \gamma (1 - \gamma). \end{aligned} \quad (B.2)$$

აქედან ვპოულობთ მეორე წარმოებულს:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{m}(\vec{v}) / d\tau^2 = \gamma \ddot{\vec{m}} + (1 - \gamma) \vec{v} (\vec{v} \cdot \ddot{\vec{m}}) + 2(\gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \dot{\vec{m}} - \gamma^4 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \dot{\vec{m}}) \vec{v} + \\ + (\gamma \nu^{-2} \vec{a} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{m}}) - 2\gamma \nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \dot{\vec{m}}) \vec{v} + \gamma \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) \vec{v}) (1 - \gamma)) + \\ 4\gamma^7 (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 \vec{m} + \gamma^5 [a^2 + (\vec{a}', \vec{v})] \vec{m} - 2\gamma^5 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{a} - 4\gamma^7 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \\ 4\gamma^5 \nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} - 2\gamma^5 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{v} - \gamma^5 \nu^{-2} (a^2 + (\vec{a}', \vec{v})) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^8 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{a} - 4\gamma^2 \nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{a} + 2\gamma^2 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{a} + \gamma^2 \nu^{-2} (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{a}'' + \\
& \gamma^8 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{v} - 2\gamma^4 \nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + 8\gamma^2 \nu^{-6} (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} - 4\gamma^2 \nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{v} - \\
& 2\gamma^2 \nu^{-4} (a^2 + (\vec{a}' \cdot \vec{v})) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \gamma^2 \nu^{-2} (\vec{a}' \cdot \vec{m}) \vec{v}) (1 - \gamma).
\end{aligned} \tag{B.3}$$

განვიხილოთ ეს სიდიდეები ნაწილაკის მიმყოფი ინერციულ ათვლის სისტემაში:

$$\begin{aligned}
(d\vec{p} / d\tau) \Big|^{PF} &= (\vec{a} \times \vec{m}), \quad (d^2 \vec{p} / d\tau^2) \Big|^{PF} = (\dot{\vec{a}} \times \vec{m}) + 2(\vec{a} \times \dot{\vec{m}}), \\
(d^3 \vec{p} / d\tau^3) \Big|^{PF} &= 4a^2 (\vec{a} \times \vec{m}) + (\ddot{\vec{a}} \times \vec{m}) + 3(\dot{\vec{a}} \times \dot{\vec{m}}) + 3(\vec{a} \times \ddot{\vec{m}})
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
(d\vec{m}(\vec{v}) / d\tau) \Big|^{PF} &= \dot{\vec{m}} + \lim_{\nu \rightarrow 0} (\gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{m} - \gamma^4 \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \\
& (\gamma \nu^{-2} \vec{a} (\vec{v} \cdot \vec{m}) - 2\gamma \nu^{-4} (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} + \gamma \nu^{-2} (\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{v}) (1 - \gamma)) = \dot{\vec{m}}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

ანალოგიურად,

$$d^2 m_a(\vec{v}) / d\tau^2 \Big|^{PF} = \lim_{\nu \rightarrow 0} (d^2 \vec{m}_a(\vec{v}) / d\tau^2) \Big|^{PF} = \ddot{m}_a + (-a_a (\vec{a} \cdot \vec{m}) + a^2 m_a), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{B.6}$$

ანალოგიურად,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} (d^3 \vec{m}(\vec{v}) / d\tau^3) \Big|^{PF} = \ddot{\vec{m}} - 3(\vec{a} \cdot \vec{m}) \vec{a} - (3/2)(\vec{a} \cdot \vec{m}) \dot{\vec{a}} - (3/2)(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{a} + 4a^2 \dot{\vec{m}} + 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{m}. \tag{B.7}$$

ბოლო ტოლობის მიღებისას გამოყენებულია შემდეგი ცხადი თანაფარდობა

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu^{-2} (1 - \gamma) = -(1/2).$$

შესაბამისად, საკუთარ ათვლის სისტემაში გვაქვს:

$$(d\mu_{ik} / d\tau) \Big|^{PF} = \begin{pmatrix} 0 & -(\vec{a} \times \vec{m})_x & -(\vec{a} \times \vec{m})_y & -(\vec{a} \times \vec{m})_z \\ (\vec{a} \times \vec{m})_x & 0 & -\dot{m}_z & \dot{m}_y \\ (\vec{a} \times \vec{m})_y & \dot{m}_z & 0 & -\dot{m}_x \\ (\vec{a} \times \vec{m})_z & -\dot{m}_y & \dot{m}_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

$$(d^2 \mu_{ik} / d\tau^2) \Big|^{PF} = \begin{pmatrix} 0 & -k_x & -k_y & -k_z \\ k_x & 0 & -n_z & n_y \\ k_x & n_z & 0 & -n_x \\ k_x & -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

სადაც

$$\vec{k} = (\dot{\vec{a}} \times \vec{m}) + 2(\vec{a} \times \dot{\vec{m}}), \quad \vec{n} = -\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{m}) + a^2 \vec{m} + \ddot{\vec{m}}.$$

$$(d^3 \mu_{ik} / d\tau^3) \Big|^{PF} = \begin{pmatrix} 0 & -k'_x & -k'_y & -k'_z \\ k'_x & 0 & -n'_z & n'_y \\ k'_x & n'_z & 0 & -n'_x \\ k'_x & -n'_y & n'_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\vec{k}' &= 3(\vec{a} \times \ddot{\vec{m}}) + 3(\dot{\vec{a}} \times \dot{\vec{m}}) + (\ddot{\vec{a}} \times \vec{m}) + 4a^2 (\vec{a} \times \vec{m}), \\
\vec{n}' &= (\ddot{\vec{m}} - 3(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) \vec{a} - (3/2)(\vec{a} \cdot \vec{m}) \dot{\vec{a}} - (3/2)(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \vec{a} + 4a^2 \dot{\vec{m}} + 3\vec{m} (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}))
\end{aligned}$$

C. მაგნიტური მომენტის ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალის
ი. ფრენკელისეული გამოყვანა

მიზანშეწონილად ჩავთვალოთ ი. ფრენკელის [16] ნაშრომის დეტალური განხილვა და ანალიზი რომ გვეჩვენებინა, რა სახის შეცდომა დაუშვა ავტორმა და გაგვეანალიზებინა ამ შეცდომის მიზეზები და შედეგები (დისერტაციაში ეს შეცდომა შევასწორეთ და მივიღეთ [16] სტატიაში მოყვანილისგან განსხვავებული გამოსახულება).

ამ დამატებაში შენარჩუნებულია [16] სტატიის აღნიშვნები – ბერძნული ინდექსები იღებს ოთხ მნიშვნელობას – 1,2,3,4.

[16] სტატიაში განიხილება წერტილოვანი დამუხტული ნაწილაკი და მიღებულია სწორი გამოსახულება მისი პოტენციალისთვის (ლიენარ–ვიხერტის პოტენციალი). ეს გაკეთებულია გამოყენებული მათემატიკური მეთოდის შესამოწმებლად. პოტენციალი [16]-ში გამოთვლილია შემდეგი კონტურული ინტეგრალის საშუალებით [16], ფ-ლა (24)):

$$\varphi^\alpha = \frac{ke}{2\pi i} \oint \frac{1}{S^2} \frac{dx'^\alpha}{dt'}, \quad (C.1)$$

სადაც ინტეგრება ხდება t' კომპლექსურ სიბრტყეზე, ხოლო $S^2 = (x'_\alpha - x_\alpha, x'^\alpha - x^\alpha)$ მანძილია მუხტიდან დაკვირვების x^α წერტილამდე; აქ $k=2$. ინტეგრება შეიძლება მუხტის საკუთარი τ' დროითაც, (C.1) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\varphi^\alpha = \frac{ke}{2\pi i} \oint \frac{1}{S^2} \frac{dx'^\alpha}{d\tau'} d\tau', \quad (C.2)$$

(C.2) ინტეგრალი აიღება ისეთი შეკრული წირის გასწვრივ, რომლის შიგნითაც მხოლოდ ერთი პოლუსია. კერძოდ, თუ ეს პოლუსი შეესაბამება $R - (t - t') = 0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნს, სადაც

$$R^2 = (\vec{x}' - \vec{x}, \vec{x}' - \vec{x}), \quad (C.3)$$

მაშინ ნაშთის გამოთვლა ელექტრული ველის პოტენციალისთვის იძლევა ლიენარ–ვიხერტის ცნობილ ფორმულას:

$$\varphi_\alpha = ke \left\{ \left(\frac{dx'_\alpha}{d\tau'} \right) / \left(\frac{dS^2}{d\tau'} \right) \right\}_{t'=t-R}. \quad (C.4)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება მაგნიტური მომენტით განპირობებული პოტენციალი Ψ_α . [16]-ში ის წარმოდგენილია $\mu_{\alpha\beta}$ ტენზორისა და $x'_\alpha - x_\alpha$ ვექტორის მეშვეობით, ამასთან, ცხადია, დამოკიდებულება $\mu_{\alpha\beta}$ -ზე უნდა იყოს წრფივი. (C.4)-ის მსგავსად:

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{2\pi i} \oint \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) f(S) d\tau'. \quad (C.5)$$

აქ Q პროპორციულობის კოეფიციენტი, ხოლო $f(S)$ – ჯერ-ჯერობით უცნობი ფუნქცია.

a) $f(S)$ ფუნქციის მოსამებნად [16]-ში გამოყენებულია მაქსველის განტოლება:

$$\frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^\beta \partial x_\beta} = 0, \quad (C.6)$$

რომელიც სამართლიანია 4-სივრცეში ყველგან, გარდა ნაწილაკის მსოფლიო წირისა.

გამოთვლილია შემდეგი წარმოებულები:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) f(S) = \mu'_{\alpha\gamma} f(S) + \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \frac{\partial f(S)}{\partial x^\gamma}, \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x_\gamma} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) f(S) = 2\mu'_{\alpha\gamma} \frac{\partial f(S)}{\partial x^\gamma} + \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \frac{\partial^2 f(S)}{\partial x^\gamma \partial x_\gamma}. \quad (C.8)$$

ცხადია, რომ

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x^\gamma} = \frac{df(S)}{dS} \frac{x^\gamma - x'^\gamma}{S}, \quad (C.9)$$

$$\frac{\partial^2 f(S)}{\partial x^\gamma \partial x_\gamma} = \frac{d^2 f(S)}{dS^2} \frac{(x^\gamma - x'^\gamma)^2}{S^2} + \frac{df(S)}{dS} \frac{4S^2 - (x^\gamma - x'^\gamma)^2}{S^3}. \quad (C.10)$$

მაშასადამე,

$$\frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^\beta \partial x_\beta} = \frac{Q}{2\pi i} \oint \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \left\{ \frac{d^2 f(S)}{dS^2} + \frac{5}{S} \frac{df(S)}{dS} \right\} d\tau' = 0. \quad (C.11)$$

აქედან გამომდინარეობს დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2 f(S)}{dS^2} + \frac{5}{S} \frac{df(S)}{dS} = 0. \quad (C.12)$$

ადვილი გასასინჯია, რომ ამ განტოლების ამონახსნია $f = \frac{1}{S^4}$ (ადიტიური მუდმივის

სიზუსტით). საბოლოოდ, (C.5) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{2\pi i} \oint \frac{\mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta)}{S^4} d\tau'. \quad (C.13)$$

პოტენციალი (C.13) ლორენცის ყალიბრებაშია, რადგან

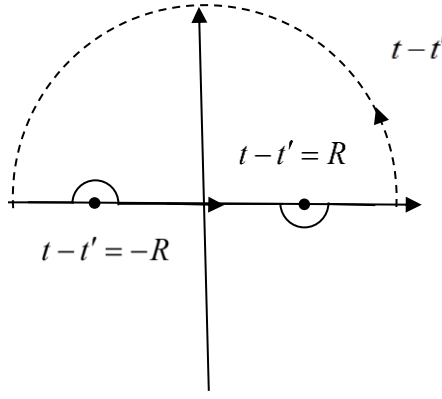
$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{Q}{2\pi i} \oint \left\{ \mu'_{\alpha\alpha} f(S) + \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \frac{df(S)}{dS} \frac{x^\alpha - x'^\alpha}{S} \right\} d\tau' = 0. \quad (C.14)$$

ეს ტოლობა ავტომატურად სრულდება, რადგან $\mu_{\alpha\beta}$ ანტისიმეტრიული ტენზორია.

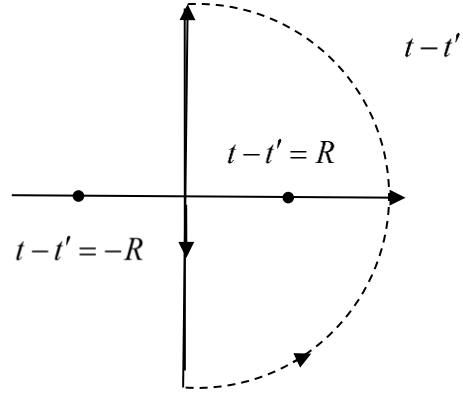
b) Q -ს განსაზღვრისთვის [16]-ში განხილულია უძრავი ნაწილაკი, რომელსაც გარკვეული სიდიდისა და მიმართულების მაგნიტური მომენტი აქვს – $\vec{m} = \text{const}$ ($\vec{p} = 0$).

(C.13)-ში ინტეგრება შეკრულ ტრაექტორიაზე შეცვლილია დროის წარმოსახვითი ღერძის

გასწვრივ ინტეგრებით (იხ. ნახ. 4 და ნახ. 5).



ნახ. 4.



ნახ. 5.

მაშინ ინტეგრალი (C.13) შემდეგ სახეს იღებს:

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{2\pi i} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S^4} d\tau' = \frac{Q}{2\pi i} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{1}{S^4} d\tau' \quad (C.15)$$

ახალ ცვლადზე $u = i\tau'$ გადასვლის შედეგად [16]-ში მიღებულია ფორმულა:

$$\Psi_\alpha = -\frac{Q}{2\pi} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S^4} du = -\frac{Q}{2\pi} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(R^2 + u^2)^2} du. \quad (C.16)$$

საბოლოოდ, უძრავი ნაწილაკისთვის მიიღება:

$$\Psi_\alpha = -\frac{Q}{2\pi} \mu'_{\alpha\beta} (x'^\beta - x^\beta), \quad (C.17)$$

სადაც $R^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$, ხოლო $\mu_{\alpha\beta}$ ტენზორს უძრავი ნაწილაკისთვის (2.4.3) სახე აქვს. მაშინ

$$\Psi_0 = 0, \quad \vec{\Psi} = \frac{Q}{4} \frac{[\vec{R}, \vec{m}]}{R^3}. \quad (C.18)$$

იმისთვის, რომ მიღებული ვექტორული პოტენციალი $\vec{\Psi}$ დაემთხვეს $\vec{m}$ მაგნიტური მომენტის მქონე ელემენტარული დენის ვექტორ-პოტენციალს, [16] ნაშრომში არჩეულია

$$Q = -4. \quad (C.19)$$

c) ზოგად შემთხვევაში, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს ნებისმიერი $\vec{v}$ სიჩქარით, (C.13) ინტეგრალი [16]-ში გამოთვლილია ნაშთთა თეორიით. რადგან იძებნება დაგვიანებული პოტენციალი, ნაშთის გამოთვლა საჭირო იყო

$$R_0 = t - t'_0 \quad (C.20)$$

წერტილში. τ' საკუთარი დროით ინტეგრების ნაცვლად ინტეგრალი აღებულია t' დროით. ამასთან, [16]-ში გამოყენებულია დაშლა

$$S^4 = [R^2 - (t - t')^2]^2 = [R + (t - t')][R - (t - t')]^2 \quad (C.21)$$

და ინტეგრალის გამოთვლის გასამარტივებლად განვიხილავთ (C.21) ფორმულის $t \rightarrow t'_0$ ზღვარს. $(t-t'_0)$ სიდიდის მიხედვით პირველ მიახლოებაში სამართლიანია ფორმულა

$$\lim_{t \rightarrow t'_0} [R - (t - t')] = \frac{d}{dt} [R - (t - t')] \cdot (t - t'_0) = \left(1 - \frac{(\vec{R}, \vec{v})}{R} \right) \Big|_{t=t'_0} (t - t'_0), \quad (C.22)$$

და იგივე მიახლოებაში

$$S^4 = [R + (t - t')]^2 \left(1 - \frac{(\vec{R}, \vec{v}')}{R} \right)^2 (t - t'_0)^2. \quad (C.23)$$

საბოლოოდ, (C.13) ინტეგრალი [16]-ში გადაიწერილია შემდეგნაირად:

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{2\pi i} \frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{R}, \vec{v}')}{R} \right)^2} \oint \frac{F_\alpha(t')}{(t - t'_0)^2} dt', \quad (C.24)$$

სადაც

$$F_\alpha(t') = \frac{\mu'_{\alpha\beta} (x^\beta - x'^\beta) \sqrt{1 - v'^2}}{[R + (t - t')]^2}. \quad (C.25)$$

ცნობილია, რომ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_\alpha(t')}{(t - t'_0)^2} dt' = \left\{ \frac{d}{dt'} F_\alpha(t') \right\}_{t=t'_0}. \quad (C.26)$$

საბოლოოდ, (C.24) შემდეგნაირად იყო გადაწერილი:

$$\Psi_\alpha = -4 \left(1 - \frac{(\vec{R}, \vec{v}')}{R} \right)^{-2} \left\{ \frac{d}{dt'} \frac{\mu'_{\alpha\beta} (x^\beta - x'^\beta) \sqrt{1 - v'^2}}{[R + (t - t')]^2} \right\}_{t'=t'_0} \quad (C.27)$$

ცხადია, რომ

$$\frac{d}{dt'} \left\{ \frac{1}{[R + (t - t')]^2} \right\}_{t'=t'_0} = \left\{ -\frac{2}{[R + (t - t')]^3} \left[\frac{-2(\vec{R}, \vec{v})}{2R} - 1 \right] \right\}_{t'=t'_0} = \frac{1}{4R^3} \left(1 + \frac{(\vec{R}, \vec{v}')}{R} \right). \quad (C.28)$$

გათვალისწინებული იყო, რომ (4.7)-ის თანახმად, $\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$, ხოლო $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$.

საბოლოოდ, მიღებული იქნა

$$\Psi_\alpha = \left(1 - \frac{(\vec{R}, \vec{v}')}{R} \right)^{-2} \left\{ \frac{(x^\beta - x'^\beta)}{R^2} \frac{d}{dt'} \mu_{\beta\alpha}^* + \left(1 + \frac{(\vec{R}, \vec{v}')}{R} \right) \frac{(x^\beta - x'^\beta) \mu_{\beta\alpha}^*}{R^3} \right\}, \quad (C.29)$$

სადაც

$$\mu_{\beta\alpha}^* = \mu_{\beta\alpha} \sqrt{1 - v'^2}. \quad (C.30)$$

d) უზუსტობა, რომელიც იყო დაშვებული ამ გამოყვანაში, გამოიწვია (C.13) ფორმულის მნიშვნელში დაუშვებელი მიახლოების გამოყენებამ: (C.22) ფორმულაში ზღვარზე გადასვლა ნიშნავს ამ გამოსახულების სიმცირის მაღალი რიგის წევრების გადაგდებას. მაგრამ ეს წევრები, როგორც ვაჩვენეთ წარმოდგენილ კვლევაში, იძლევა არანულოვან წვლილს ინტეგრალში. ამ წვლილის უგულებელყოფა ცვლის მიღებულ შედეგს, კერძოდ, ამახინჯებს მის ლორენც-ტრანსფორმაციულ თვისებებს.

D. ჰიპერბოლური მოძრაობის კინემატიკა მაგნიტური მომენტის მქონე მუხტისთვის

ვიპოვოთ, როგორი კანონით უნდა იმოძრაოს მაგნიტური მომენტის მქონე დამუხტულმა ნაწილაკმა, რომ გამოსხივების რეაქციის ძალა ნულის ტოლი იყოს. 3-განზომილებიანი ფორმულირების ჩარჩოებში, წრფივი მოძრაობისთვის გვექნება:

$$F \sim \left(\frac{da}{dt'} + \frac{3a^2 v}{c^2} \gamma^2 \right) = 0. \quad (D.1)$$

შევასრულოთ სტანდარტული გარდაქმნა:

$$a' = \frac{da}{dt'} = \frac{da}{dv} \frac{dv}{dt'} = a \frac{da}{dv}.$$

შედეგად, (D.1)-დან მივიღებთ:

$$a da = -\frac{3a^2 v}{c^2 - v^2} dv \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt'} = b_1 (1 - v^2)^{3/2} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} = b_1 t + b_2.$$

აქ b_1 და b_2 ინტეგრების მუდმივებია. თუ საწყის მომენტში $v = 0$, მაშინ $b_2 = 0$ და

$$v = \frac{b_1 t}{\sqrt{1 + (b_1 t)^2}}.$$

შევნიშნოთ, რომ იგივე შედეგი მიიღება 4-განზომილებიანი (კოვარიანტული) მეთოდის გამოყენებით (იხ. (3.1.16)).

E. RR ძალის უზოგადესი სახე ლაბორატორიულ სისტემაში და PF-ში

საცნობარო მიზნებით, ამოვწეროთ რამდენიმე სასარგებლო თანაფარდობა, რომელთა გამოყენა თუმცა მარტივია, მაგრამ საკმაოდ შრომატევადი; ამ გამოთვლების შესასრულებლად გამოვიყენეთ კომპიუტერული სიმბოლური ალგებრისა და ანალიზის ალგორითმები, რომელთა ნაწილი საგანგებოდ მოვარგეთ მსგავსი ამოცანების შესრულებას. უპირველეს ყოვლისა ჩამოვწეროთ ყველა ოთხვექტორი, რომელსაც ძალის განზომილება აქვს და მეორე რიგისაა μ -ს მიხედვით. არსებობს 42 ასეთი ოთხვექტორი. მათგან მხოლოდ ერთი – $Tr(\mu \ddot{\mu})u^i$ – შეიცავს $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu^{-2}(\vec{a} \cdot \vec{\nu})^2$ ტიპის გამოსახულებებს. $F^i u_i = 0$, პირობის შესასრულებლად ნაწილაკის მყისად მიმყოფ საკუთარ ათვლის სისტემაში ძალის ნულოვანი კომპონენტა უნდა იყოს ნულის ტოლი, ამიტომ $Tr(\mu \ddot{\mu})u^i$ ვერ შევა ძალის გამოსახულებაში. ამრიგად, გვაქვს

$$\omega^2 (\omega \mu^2 \omega) u^i \Big|^{PF} = -a^2 \left(-(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 + a^2 m^2 \right) (1, \vec{0})$$

$$Tr(\mu^2) \omega^4 u^i \Big|^{PF} = -2m^2 a^4 (1, \vec{0})$$

$$Tr(\mu^2) \dot{\omega}^2 u^i \Big|^{PF} = -2m^2 (a^4 - \dot{a}^2) (1, \vec{0})$$

$$(\dot{\omega} \mu^2 \dot{\omega}) u^i \Big|^{PF} = (\dot{a}^2 m^2 - (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})^2) (1, \vec{0})$$

$$(\omega \mu^2 \ddot{\omega}) u^i \Big|^{PF} = \left(-(\vec{a} \cdot \vec{m})(\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) + (\vec{a} \cdot \ddot{\vec{a}})m^2 + 4a^2 \left(-(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 + a^2 m^2 \right) \right) (1, \vec{0})$$

$$(\omega \ddot{\omega}) Tr \mu^2 u^i \Big|^{PF} = 2 \left(4a^4 + (\vec{a} \cdot \ddot{\vec{a}}) \right) m^2 (1, \vec{0})$$

$$Tr(\mu \dot{\mu})(\omega \dot{\omega}) u^i \Big|^{PF} = 2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) (1, \vec{0})$$

$$Tr(\mu \ddot{\mu}) \omega^2 u^i \Big|^{PF} = 2 \left((\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) + a^2 m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \right) a^2 (1, \vec{0})$$

$$Tr(\dot{\mu}^2) \omega^2 u^i \Big|^{PF} = 2 \left(\dot{m}^2 - a^2 m^2 + (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \right) a^2 (1, \vec{0})$$

$$Tr(\ddot{\mu}^2) u^i \Big|^{PF} = -2 \left(\ddot{m}^2 - 4 \left(a^2 \dot{m}^2 - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})^2 \right) - 4 \left((\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) \right) - \right. \\ \left. \left(\dot{a}^2 m^2 - (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})^2 \right) + 2 \left((\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) a^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) + a^2 \left(a^2 m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \right) \right) \right) (1, \vec{0})$$

$$(\omega \dot{\mu} \dot{\omega}) u^i \Big|^{PF} = \left((\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) \right) (1, \vec{0})$$

$$(\omega \mu \ddot{\omega}) u^i \Big|^{PF} = \left((\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) a^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) + a^2 \left(a^2 m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \right) \right) (1, \vec{0})$$

$$(\omega \dot{\mu}^2 \omega) u^i \Big|^{PF} = \left(a^2 \dot{m}^2 - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})^2 \right) (1, \vec{0})$$

$$(\omega \mu \dot{\mu} \dot{\omega}) u^i \Big|^{PF} = \left(-a^2 \left(a^2 m^2 - Dp a m^2 \right) + (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) \right) (1, \vec{0}) \quad (E.1)$$

$$\begin{aligned}
Tr(\mu^2)(\omega\dot{\omega})\omega^i \Big|^{PF} &= 2m^2(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(0, \vec{a}) \\
(\omega\mu^2\dot{\omega})\omega^i \Big|^{PF} &= \left(-(\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) + (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2\right)(0, \vec{a}) \\
Tr(\mu\dot{\mu})\omega^2\omega^i \Big|^{PF} &= 2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})a^2(0, \vec{a}) \\
(\omega\mu\dot{\mu}\omega)\omega^i \Big|^{PF} &= \left(-(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) + a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\right)(0, \vec{a}) \\
Tr(\dot{\mu}\ddot{\mu})\omega^i \Big|^{PF} &= -2\left((\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) + (\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) + (\dot{\vec{m}} \cdot \ddot{\vec{m}}) - (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2\right)(0, \vec{a}) \\
Tr(\mu\ddot{\mu})\omega^i \Big|^{PF} &= \left(6(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) + 6(\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) - 2(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) - 8a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) - 6(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2\right)(0, \vec{a}) \tag{E.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\mu^2)\omega^2\dot{\omega}^i \Big|^{PF} &= 2m^2 a^2(a^2, \dot{\vec{a}}) \\
(\omega\mu^2\omega)\dot{\omega}^i \Big|^{PF} &= \left(a^2m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2\right)(a^2, \dot{\vec{a}}) \\
Tr(\mu^2)\ddot{\omega}^i \Big|^{PF} &= -2m^2(13a^4 + 3\dot{a}^2 + 4(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{a}}))(a^2, \dot{\vec{a}}) \\
Tr(\dot{\mu}^2)\dot{\omega}^i \Big|^{PF} &= -2\left(\dot{m}^2 - (a^2m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2)\right)(a^2, \dot{\vec{a}}) \\
Tr(\mu\ddot{\mu})\dot{\omega}^i \Big|^{PF} &= -2\left((\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) + a^2m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2\right)(a^2, \dot{\vec{a}}) \\
Tr(\mu\dot{\mu})\ddot{\omega}^i \Big|^{PF} &= -6(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(a^2, \dot{\vec{a}}) \tag{E.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\mu^2\omega)^i \Big|^{PF} &= \left(0, -(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})((\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m} - m^2\vec{a})\right) \\
\omega^2(\mu^2\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= \left(0, a^2(m^2\dot{\vec{a}} - (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{m})\right) \\
(\mu^2\ddot{\omega})^i \Big|^{PF} &= \left(0, -10a^2m^2\dot{\vec{a}} - m^2\ddot{\vec{a}} - 15(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2\vec{a} + 15(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m} + 10a^2(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{m} + (\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{m}\right) \\
\omega^2(\mu\dot{\mu}\omega)^i \Big|^{PF} &= \left(0, a^2((\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{m})\dot{\vec{m}})\right) \\
\omega^2(\dot{\mu}\mu\omega)^i \Big|^{PF} &= \left(a^2((a^2m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2)), -a^2(\vec{m}(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) - \vec{a}(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}))\right) \\
(\mu\ddot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= \left(0, -2(\vec{a} \cdot \vec{m})a^2\dot{\vec{m}} + (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\ddot{\vec{m}} + (-\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) + 2a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} - ((\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2)\dot{\vec{a}}\right) \\
(\dot{\omega}\mu\omega)(\mu\omega)^i \Big|^{PF} &= \left(0, -(\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m}))(\vec{a} \times \vec{m})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= -\left(a^2(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}})\right) - a^2\left(a^2 m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2\right), \\
&\quad -\left(\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m})\right)(\vec{a} \times \vec{m}) + (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})\ddot{\vec{m}} - (\dot{\vec{m}} \cdot \ddot{\vec{m}})\vec{a} - (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 \vec{a} + (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 \vec{m} \\
(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= \left(a^2\left(a^2 m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2\right) - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) + (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}), \right. \\
&\quad \left. -\dot{m}^2 \vec{a} + (\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m}))(\vec{a} \times \vec{m}) + (\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}})\dot{\vec{m}} + (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 \vec{a} - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 \vec{m}\right) \\
(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= (-2\left(a^2 \dot{m}^2 - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})^2\right) - ((\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}})), \\
&\quad (\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}})\dot{\vec{m}} - ((\dot{\vec{m}} \cdot \ddot{\vec{m}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) + a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}))\vec{a}) \\
(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= (-2((\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) - (\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}})) - (\dot{a}^2 m^2 - (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})^2), \\
&\quad -\left(a^2 m^2 - (\vec{a} \cdot \vec{m})^2\right)\dot{\vec{a}} + \left(a^2(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) - (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\right)\vec{m} - (\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}})\dot{\vec{a}} + (\dot{\vec{a}} \cdot \ddot{\vec{m}})\vec{m}) \\
(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= (0, (\vec{a} \cdot \vec{m})\ddot{\vec{m}} + 4a^2(\vec{a} \cdot \vec{m})\dot{\vec{m}} - (3/2)(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \dot{\vec{a}} + (3/2)(\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{a} - \\
&\quad (\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}})\vec{a} - 4a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} - 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2 \vec{a} + 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m}) \\
(\ddot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= (3(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) + 4a^2(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 + 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) + (\vec{a} \cdot \vec{m})(\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) - 3a^2(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) - \\
&\quad 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) - 4a^4 m^2 - (\vec{a} \cdot \ddot{\vec{a}})m^2, \quad 3(\vec{a} \cdot \vec{m})(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} + 3(\vec{a} \cdot \vec{m})(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{a} - (\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}})\vec{a} - \\
&\quad 4a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} - 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2 \vec{a} + (\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}})\vec{m} + (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 \vec{m} + (3/2)(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m} - \frac{3}{2}a^2(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\vec{m}) \\
(\mu\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= (0, \quad 4a^2(\vec{a} \cdot \vec{m})\dot{\vec{m}} + (\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m})\dot{\vec{m}} - 4a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} - (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\ddot{\vec{a}} + 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})m^2 \vec{a} - 3(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m}) \\
(\mu\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= (4a^2(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{m})(\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) - 4a^4 m^2 - (\vec{a} \cdot \ddot{\vec{a}})m^2, \\
&\quad -4a^2(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{a} - (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})\ddot{\vec{a}} + 4(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})a^2 \vec{m} + (\ddot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}})\vec{m})
\end{aligned} \tag{E.4}$$

ძალაში შეიძლება შედიოდეს მხოლოდ შემდეგი 4 გამოსახულება:

$$\begin{aligned}
e(\omega\mu\dot{\omega})u^i \Big|^{PF} &= -e(\vec{a} \cdot (\dot{\vec{a}} \times \vec{m}))(1, \vec{0}) \\
e\omega^2(\mu\omega)^i \Big|^{PF} &= e(0, -a^2(\vec{a} \times \vec{m})) \\
e(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= e\left(-(\vec{a} \cdot (\dot{\vec{a}} \times \vec{m})), (\vec{a} \times \ddot{\vec{m}}) + a^2(\vec{a} \times \vec{m})\right) \\
e(\dot{\mu}\dot{\omega})^i \Big|^{PF} &= e\left((\vec{a} \cdot (\dot{\vec{a}} \times \vec{m})), (\dot{\vec{a}} \times \dot{\vec{m}}) - a^2(\vec{a} \times \vec{m})\right)
\end{aligned} \tag{E.5}$$

$\vec{m} = \text{const}$ შემთხვევაში ზემოთ მოყვანილი 4 გამოსახულებიდან მხოლოდ 15 არის წრფივად დამოუკიდებელი, მაგალითად:

$$\begin{aligned}
&Tr(\mu^2)\omega^4 u^i, Tr(\mu^2)\dot{\omega}^2 u^i, (\dot{\omega}\mu^2\dot{\omega})u^i, \omega^2(\omega\mu^2\omega)u^i, Tr(\mu^2)(\omega\ddot{\omega})u^i, (\omega\mu^2\ddot{\omega})u^i, Tr(\mu^2)(\omega\dot{\omega})\omega^i, \\
&(\omega\mu^2\dot{\omega})\omega^i, Tr(\mu^2)\omega^2\dot{\omega}^i, (\omega\mu^2\omega)\omega^i, Tr(\mu^2)\ddot{\omega}^i, (\omega\dot{\omega})(\mu^2\omega)^i, \omega^2(\mu^2\dot{\omega})^i, (\dot{\omega}\mu\omega)(\mu\omega)^i, (\mu^2\ddot{\omega})^i.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

(E.5) გამოსახულებებიდან $\vec{m} = \text{const}$ შემთხვევაში მხოლოდ 2 არის წრფივად დამოუკიდებელი, მაგალითად:

$$e\omega^2(\mu\omega)^i, e(\omega\mu\dot{\omega})u^i. \quad (\text{E.7})$$

გამოსხივების რეაქციის ძალის კოვარიანტული სახით წარმოსადგენად დაგვჭირდება შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} m^2 a^4 &= -(1/2) \text{Tr}(\mu^2) \omega^4 \Big|^{PF} \\ \dot{a}^2 m^2 &= (1/2) \text{Tr}(\mu^2) (\dot{\omega}^2 - \omega^4) \Big|^{PF} \\ (\dot{a} \cdot \vec{m})^2 &= (1/2) (-2(\dot{\omega}\mu^2\dot{\omega}) + \text{Tr}(\mu^2) \dot{\omega}^2 - \text{Tr}(\mu^2) \omega^4) \Big|^{PF} \\ a^2 (\vec{a} \cdot \vec{m})^2 &= (1/2) (-\text{Tr}(\mu^2) \omega^4 + 2\omega^2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \vec{\ddot{a}}) m^2 &= (1/2) \text{Tr}(\mu^2) (4\omega^4 + (\vec{\omega} \cdot \vec{\ddot{\omega}})) \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\vec{\ddot{a}} \cdot \vec{m}) &= (1/2) (\text{Tr}(\mu^2) (4\omega^4 + (\omega\ddot{\omega})) - 2(\omega\mu^2\ddot{\omega}) - 8\omega^2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) &= (1/2) (-2(\omega\dot{\mu}\mu\dot{\omega}) + \text{Tr}(\mu\dot{\mu})(\omega\dot{\omega})) \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) (\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) &= (1/2) \text{Tr}(\mu\dot{\mu})(\omega\dot{\omega}) \Big|^{PF} \\ a^2 (\vec{m} \cdot \vec{\ddot{m}}) &= (1/2) \omega^2 (\text{Tr}(\mu\ddot{\mu}) + 2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \\ a^2 \dot{m}^2 &= (1/2) \omega^2 (\text{Tr}(\dot{\mu}^2) - 2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}})^2 &= (1/2) (\text{Tr}(\dot{\mu}^2) \omega^2 - 2(\omega\dot{\mu}^2\omega) - 2\omega^2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\vec{a} \cdot \vec{\ddot{m}}) &= (1/2) (\text{Tr}(\mu\ddot{\mu}) \omega^2 - 2(\omega\mu\ddot{\mu}\omega)) \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) &= (1/2) (\text{Tr}(\mu\dot{\mu})(\omega\dot{\omega}) - 2(\omega\mu\dot{\mu}\dot{\omega}) + 2\omega^2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \\ \ddot{m}^2 (1/2) &= (-\text{Tr}(\ddot{\mu}^2) + 2(\dot{\omega}\mu^2\dot{\omega}) + 8(\omega\dot{\mu}^2\omega) + 8(\omega\dot{\mu}\mu\dot{\omega}) - 4(\omega\mu\ddot{\mu}\omega) - 2\omega^2(\omega\mu^2\omega)) \Big|^{PF} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} m^2 (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) a_\alpha &= (1/2) \text{Tr}(\mu^2) (\omega\dot{\omega}) \omega_\alpha \Big|^{PF} \\ (\vec{a} \cdot \vec{m}) (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) a_\alpha &= (1/2) (\text{Tr}(\mu^2) (\omega\dot{\omega}) - 2(\omega\mu^2\dot{\omega})) \omega_\alpha \Big|^{PF} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{m}) (\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) a_\alpha &= (1/2) \left(\text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) - 2(\omega \mu^2 \dot{\omega}) \right) \omega_\alpha \Big|^{PF} \\
(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) a^2 a_\alpha &= (1/2) \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 \omega_\alpha \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{m}} \cdot \ddot{\vec{m}}) a_\alpha &= \left(-(1/2) \text{Tr}(\dot{\mu} \ddot{\mu}) + (\omega \mu \dot{\mu} \omega) + (\omega \mu^2 \dot{\omega}) \right) \omega_\alpha \Big|^{PF} \\
(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) a_\alpha &= (-1/2) \left(\text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) + \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 + 6(\omega \mu \dot{\mu} \omega) + 6(\omega \mu^2 \dot{\omega}) \right) \omega_\alpha \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}
m^2 a^2 \dot{a}_\alpha &= (1/2) \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 \dot{\omega}_\alpha \Big|^{PF} \\
(\vec{a} \cdot \vec{m})^2 \dot{a}_\alpha &= (1/2) \left(\text{Tr}(\mu^2) \omega^2 - 2(\omega \mu^2 \omega) \right) \dot{\omega}_\alpha \Big|^{PF} \\
m^2 \ddot{a}_\alpha &= -(1/2) \text{Tr}(\mu^2) \left(\ddot{\omega}_\alpha + 10\omega^2 \dot{\omega}_\alpha + 15(\omega \dot{\omega}) \omega_\alpha \right) \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}
\dot{m}^2 \dot{a}_\alpha &= (1/2) \left(-\text{Tr}(\dot{\mu}^2) + 2(\omega \mu^2 \omega) \right) \dot{\omega}_\alpha \Big|^{PF} \\
(\vec{m} \cdot \ddot{\vec{m}}) \dot{a}_\alpha &= - \left((1/2) \text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) + (\omega \mu^2 \omega) \right) \dot{\omega}_\alpha \Big|^{PF} \\
(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}) \ddot{a}_\alpha &= -(1/2) \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \left(\ddot{\omega}_\alpha + 4\omega^2 \omega_\alpha \right) \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{m}) (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) m_\alpha &= (1/2) (\omega \dot{\omega}) \left(-2(\mu^2 \dot{\omega})_\alpha + \text{Tr}(\mu^2) \omega_\alpha \right) \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) a^2 m_\alpha &= (1/2) \left(\text{Tr}(\mu^2) \dot{\omega}_\alpha - 2(\mu^2 \dot{\omega})_\alpha \right) \omega^2 \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m})) (\vec{a} \times \vec{m})_\alpha &= -(\dot{\omega} \mu \omega) (\mu \omega)_\alpha \Big|^{PF} \\
(\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) m_\alpha &= (1/2) \left(\text{Tr}(\mu^2) (\ddot{\omega}_\alpha - 10\omega^2 \dot{\omega}_\alpha - 15(\omega \dot{\omega}) \omega_\alpha) + 2(\mu^2 \ddot{\omega})_\alpha + 20\omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})_\alpha + 30(\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)_\alpha \right) \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{a}} \cdot \ddot{\vec{m}}) m_x &= (1/2) \left(2(\dot{\mu} \mu \dot{\omega})_x - \text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) \dot{\omega}_x - \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 \dot{\omega}_x + 2\omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})_x - 2(\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)_x + \text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) \omega_x \right) \Big|^{PF} \\
(\vec{a} \cdot \dot{\vec{m}}) a^2 m_x &= (1/2) \left(-2(\dot{\mu} \mu \omega)_x + \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega_x \right) \omega^2 \Big|^{PF} \\
(\ddot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) m_x &= (1/2) \left(2(\dot{\mu} \mu \ddot{\omega})_x + 8\omega^2 (\dot{\mu} \mu \omega)_x - 4\text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 \omega_x - \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \ddot{\omega}_x \right) \Big|^{PF} \\
(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) m_x &= (1/4) \left(4(\ddot{\mu} \mu \omega)_x + 4\omega^2 (\dot{\mu} \mu \omega)_x + 3\omega^2 \text{Tr}(\mu^2) \dot{\omega}_x - 6\omega^2 (\mu^2 \dot{\omega})_x + \right. \\
&\quad \left. 6(\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)_x - 2\text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) \omega_x - 2\text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 \omega_x - 3\text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) \omega_x \right) \Big|^{PF} \\
(\vec{a} \cdot \vec{m}) a^2 \dot{m}_x &= (1/2) \left(-2(\mu \dot{\mu} \omega)_x + \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega_x \right) \omega^2 \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) \dot{m}_x &= (\dot{\mu}^2 \dot{\omega})_x - (1/2) \text{Tr}(\mu^2) \dot{\omega}_x + (\dot{\omega} \mu \omega) (\mu \omega)_x - (\dot{\mu} \mu \omega)_x \omega^2 + (\omega \mu^2 \omega) \dot{\omega}_x \Big|^{PF} \\
(\vec{a} \cdot \ddot{\vec{m}}) \dot{m}_x &= (\dot{\mu} \mu \ddot{\omega})_x - (1/2) \text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) \omega_x + 2(\omega \mu \dot{\mu} \omega) \omega_x + (\omega \mu \mu \dot{\omega}) \omega_x \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \dot{m}_x &= (1/2) \left(2(\mu \dot{\mu} \ddot{\omega})_x + 8\omega^2 (\mu \dot{\mu} \omega)_x - 6(\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)_x - 4\omega^2 \omega_x - \text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \ddot{\omega}_x \right) \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \ddot{m}_x &= (1/2) \left(-\text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) \dot{\omega}_x + 2(\mu \ddot{\mu} \dot{\omega})_x - \text{Tr}(\mu^2) \omega^2 \dot{\omega}_x - 4\omega^2 (\mu \dot{\mu} \omega)_x + \text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) \omega_x - 2(\omega \mu^2 \dot{\omega}) \omega_x \right) \Big|^{PF} \\
(\ddot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{m}}) \ddot{m}_x &= (\dot{\mu} \ddot{\mu} \omega)_x - (\dot{\omega} \mu \omega)_x (\mu \omega)_x + \omega^2 (\dot{\mu} \mu \omega)_x - (1/2) \text{Tr}(\dot{\mu} \ddot{\mu}) \omega_x + (\omega \mu \dot{\mu} \omega)_x + (\omega \mu^2 \dot{\omega}) \omega_x \Big|^{PF} \\
(\ddot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) \ddot{m}_x &= (1/4) \left(4(\mu \ddot{\mu} \omega)_x + 3\text{Tr}(\mu^2) \omega^2 \dot{\omega}_x + 16\omega^2 (\mu \dot{\mu} \omega)_x + 12(\omega \dot{\omega}) (\mu^2 \omega)_x - 6(\omega \mu^2 \omega) \dot{\omega}_x - \right. \\
&\quad \left. 2\text{Tr}(\mu \ddot{\mu}) \omega_x - 2\text{Tr}(\mu \dot{\mu}) \omega^2 \omega_x - 3\text{Tr}(\mu^2) (\omega \dot{\omega}) \omega_x - 12(\omega \mu \dot{\mu} \omega)_x - 6(\omega \mu^2 \dot{\omega}) \omega_x \right) \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m})) &= -(\omega \mu \dot{\omega}) \Big|^{PF} \\
a^2 (\vec{a} \times \vec{m})_x &= -\omega^2 (\mu \omega)_x \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\vec{a}} \times \ddot{\vec{m}})_x &= (\ddot{\mu} \omega)_x + \omega^2 (\mu \omega)_x \Big|^{PF} \\
(\dot{\vec{a}} \times \dot{\vec{m}})_x &= (\dot{\mu} \dot{\omega})_x - \omega^2 (\mu \omega)_x \Big|^{PF}
\end{aligned} \tag{E.17}$$

F. RR ძალა, რომელიც მოქმედებს წრეწირზე თანაბრად მოძრავ ნაწილაკზე

განვიხილოთ მუხტისა და მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკი, რომელიც მოძრაობს წრეწირზე მუდმივი სიდიდის მქონე სიჩქარით ლაბორატორიული ათვის სისტემის მიმართ. დავუშვათ, მისი მაგნიტური მომენტი მიმართულია წრეწირის სიბრტყის მართობულად.

მივმართოთ Ox ღერძი მყისი $\vec{v}$ სიჩქარის გასწვრივ, მაშინ

$$a_x = a_z = 0, a_y = -v^2/r, \quad a'_x = da_x/dt = -v^3/r^2, \quad a'_y = a'_z = 0; \quad (F.1)$$

დამატება A-ს თანახმად,

$$\omega^i = (0, 0, -v^2\gamma^2/r, 0), \quad \dot{\omega}^i = (\gamma^{5/2}v^4/r^2, -v^3\gamma^{5/2}(1-2v^2)/r^2, 0, 0). \quad (F.2)$$

(2.2.2)-ის თანახმად:

$$\vec{m} = (0, 0, |\vec{m}| \gamma). \quad (F.3)$$

ლორენცის გარდაქმნის თანახმად PF-ში:

$$\begin{aligned} \omega^{iPF} &= (0, 0, -v^2\gamma^2/r, 0), \quad \dot{\omega}^{iPF} = (2v^4\gamma^4/r^2, -v^3\gamma^4/r^2, 0, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^{PF} = -v^2\gamma^2/r \vec{j}, \quad \dot{a}^{PF} = -v^3\gamma^4/r^2 \vec{i} \end{aligned} \quad (F.4)$$

დამატება A-ს თანახმად,

$$\vec{m}^{PF} = (0, 0, |\vec{m}|). \quad (F.5)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ (F.4) და (F.5)-დან გამომდინარეობს, რომ PF-ში:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{m}) &= 0, \quad (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{m}) = 0, \quad (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) = 0, \quad (\vec{a} \times \vec{m}) = -m\gamma^2 \frac{v^2}{r} \vec{i}, \\ (\dot{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \times \vec{m})) &= m\gamma^6 \frac{v^5}{r^3}, \quad \dot{\vec{a}} = -\gamma^4 \frac{v^3}{r^2} \vec{i}, \quad \dot{a}^2 = \gamma^4 \frac{v^4}{r^2}, \end{aligned} \quad (F.6)$$

მაშინ, (2.5.14)-ის თანახმად,

$$F^{iPF} = (0, (-e^2 \frac{2}{3r^2} + emh_1 \frac{2v^3\gamma^2}{3r^3} - m^2 \frac{(2k_1 + k_2 + k_5 - k_4)v^4}{105r^4} \gamma^4) v^3\gamma^4, 0, 0). \quad (F.7)$$

ლორენცის გარდაქმნის თანახმად, ლაბორატორიულ ათვის სისტემაში:

$$F^{iPF} = (-\frac{2e^2}{3r^2} + e|\vec{m}|h_1 \frac{2v^3}{3r^3c^4} \gamma^2 - \vec{m}^2 \frac{(2k_1 + k_2 + k_5 - k_4)v^4}{105r^4c^6} \gamma^4) \frac{v^3}{c^3} \gamma^4 \left(\frac{v}{c}, \hat{v} \right) \quad (F.8)$$

გ. პოტენციალის მიღება გრინის ფუნქციის გამოყენებით
მაგნიტური მომენტის შესაბამისი 4-დენის სიმკვრივიდან

გამოსახულება (2.3.8) (თავი 2) მაგნიტურ მომენტთან დაკავშირებული დენის სიმკვრივისთვის შეიძლება შევამოწმოთ დალამბერის განტოლების გრინის ფუნქციის ([48] ფორმულა (17.21)) გამოყენებით:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t) \Rightarrow \varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \rho(\vec{r}'', t'') d\vec{r}'' dt''. \quad (G.1)$$

$$(\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'')$$

ამ ფორმულის თანახმად, თავი 2, (2.3.2) და (2.3.8)-დან გამომდინარეობს:

$$\partial_n \partial^n \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\mu^{kp}}{X^l u_l} \Big|_{R=X^0} = -4\pi \frac{\partial}{\partial x^p} \mu^{kp}(t) \gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\mu^{kp}}{X^l u_l} \Big|_{R=X^0} = - \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \frac{\partial}{\partial x^{''p}} \mu^{kp}(t'') \gamma \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt''. \quad (G.2)$$

b) შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$K \equiv - \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \mu^{k\alpha}(t'') \gamma(t'') \frac{\partial}{\partial x^{''\alpha}} \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt'', \quad (G.3)$$

$$L \equiv - \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial t''} (\mu^{k0}(t'') \gamma^{-1}(t'')) \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt'', \quad (G.4)$$

$$M \equiv - \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \cdot \mu^{k0}(t'') \gamma^{-1}(t'') (-v^\alpha(t'')) \frac{\partial}{\partial x^{''\alpha}} \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt''. \quad (G.5)$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\mu^{kp}}{X^l u_l} \Big|_{R=X^0} = K + L + M \quad (G.6)$$

(ცხადია, რომ (G.6) ტოლფასია (G.2)-ის).

ჯერ განვიხილოთ ბოლო გამოსახულების ის ნაწილი, სადაც $p = \alpha = 1, 2, 3$.

(G.3)-ის თანახმად,

$$K = - \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \mu^{k\alpha}(t'') \gamma(t'') \frac{\partial}{\partial x^{''\alpha}} \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt'' =$$

$$= - \int \frac{\mu^{k\alpha}(t'') \gamma(t'')}{R} \frac{\partial}{\partial x^{''\alpha}} \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}''.$$

$$(t'' = t - R, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'')$$

$$(G.7)$$

გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე:

$$k_1 = x'' - x'(t''), \quad k_2 = y'' - y'(t''), \quad k_3 = z'' - z'(t''). \quad (G.8)$$

ადვილად მიიღება, რომ

$$\frac{\partial k^i}{\partial x''^p} = \delta_p^i - v^i(t'') \frac{\partial t''}{\partial x''^p} = \delta_p^i - v^i(t'') \frac{R_p}{R}. \quad (G.9)$$

მაშასადამე, გადასვლის იაკობიანია

$$J = R \left(R - \vec{R} \cdot \vec{v} \right)^{-1} \quad (G.10)$$

და, შესაბამისად,

$$K = - \int \frac{\mu^{k\alpha}(t'') \gamma(t'')}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \delta(k^1) \delta(k^2) \delta(k^3) dk^1 dk^2 dk^3. \quad (G.11)$$

$$(t'' = t - R, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'')$$

მაშინ შესაკრებში, სადაც $\alpha = 1$, გვექნება

$$K_1 \equiv - \int \frac{\mu^{k1}(t'') \gamma(t'')}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \frac{\partial}{\partial k^1} \delta(k^1) dk^1 = \left(\frac{\partial}{\partial k^1} \frac{\mu^{k1}(t'') \gamma(t'')}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right) \Big|_{k^1=0}. \quad (G.12)$$

$$(\vec{R} = x - (k^1 + x'(t'')), \quad y - y'(t''), \quad z - z'(t''), \quad t'' = t - R)$$

რადგანაც გასაწარმოებელი გამოსახულება დამოკიდებულია k^1 -ზე მხოლოდ $\vec{R}$ -ის მეშვეობით, ამიტომ

$$K_1 = \left(- \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu^{k1}(t'') \gamma(t'')}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right) \Big|_{k^1=0} = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\mu^{k1}}{X^l u_l} \Big|_{R=X^0}. \quad (G.13)$$

შესაკრებში, სადაც $\alpha = 2$ და $\alpha = 3$, გვექნება ანალოგიური შედეგი. ამიტომ საბოლოოდ,

$$K = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\mu^{k\alpha}}{X^l u_l} \Big|_{R=X^0}. \quad (G.14)$$

ახლა განვიხილოთ

$$L = - \int \frac{\delta(t'' - t + R)}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial t''} (\mu^{k0}(t'') \gamma^{-1}(t'')) \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt'' =$$

$$= - \int \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} R \frac{\delta(k^1) \delta(k^2) \delta(k^3) dk^1 dk^2 dk^3}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}}. \quad (G.15)$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$L = \frac{1}{X - \vec{X} \cdot \vec{v}} \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''}. \quad (G.16)$$

$$(\vec{X} = \vec{r} - \vec{r}'(t''), \quad t'' = t - X)$$

მსგავსადვე,

$$M = - \int \frac{1}{R} \delta(t'' - t + R) \mu^{k0}(t'') \gamma^{-1}(t'') (-v^\alpha(t'')) \frac{\partial}{\partial x''^\alpha} \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt'' =$$

$$= - \int \frac{1}{R} \mu^{k0}(t'') \gamma^{-1}(t'') (-v^\alpha(t'')) \frac{\partial}{\partial x''^\alpha} \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t'')) d\vec{r}'' dt''. \quad (G.17)$$

გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე. (G.8) და (G.9)-ის თანახმად,

$$M = - \int \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}} \cdot \mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t'') (-v^\alpha(t'')) \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \delta(k^1) \delta(k^2) \delta(k^3) dk^1 dk^2 dk^3 \quad (G.18)$$

და, (G.14)-ის ანალოგიურად,

$$M = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t'')}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} (-v^\alpha(t'')) \right) \Big|_{R=X^0}. \quad (G.19)$$

განვიხილოთ

$$L + M = \frac{1}{X - \vec{X} \cdot \vec{v}} \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k_0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t'')}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} (-v^\alpha(t'')) \right). \quad (G.20)$$

ცნობილი ფორმულების თანახმად (იხ. [7], §63):

$$\begin{aligned} \frac{\partial t''}{\partial t} &= \frac{X^0}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}}, & \frac{\partial X^0}{\partial t} &= \frac{-\vec{X} \cdot \vec{v}}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}}, & \frac{\partial(\vec{X} \cdot \vec{v})}{\partial t} &= \frac{X^0(\vec{X} \cdot \vec{a} - v^2)}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}}, \\ \frac{\partial t''}{\partial x^\alpha} &= \frac{-X^\alpha}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}}, & \frac{\partial X^0}{\partial x^\alpha} &= \frac{X^\alpha}{X^0} + \frac{X^\alpha(\vec{X} \cdot \vec{v})}{X^0(X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v})}, \\ \frac{\partial(\vec{X} \cdot \vec{v})}{\partial x^\alpha} &= v^\alpha + \frac{v^2 X^\alpha}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} - \frac{X^\alpha(\vec{X} \cdot \vec{a})}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}}, & \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} &= \frac{-\vec{X} \cdot \vec{a}}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} \cdot \frac{X^0(\vec{X} \cdot \vec{a} - v^2)}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}}. \end{aligned} \quad (G.21)$$

შესაბამისად,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t''))}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k_0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} \frac{\partial t''}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k_0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} \left(1 - \frac{-\vec{X} \cdot \vec{v}}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k_0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} \left(1 - \frac{\partial t''}{\partial x^\alpha} \cdot v^\alpha \right) = \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k_0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} - \frac{\partial(\mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t''))}{\partial x^\alpha} \cdot v^\alpha. \end{aligned} \quad (G.22)$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} &= \frac{1}{(X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v})^2} \left(\frac{\vec{X} \cdot \vec{v}}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} + \frac{X^0(\vec{X} \cdot \vec{a} - v^2)}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} \right), \\ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{v^\alpha}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} \right) &= \\ &= \frac{\vec{X} \cdot \vec{a}}{(X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v})^2} + \frac{v^\alpha}{(X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v})^2} \left(\frac{X^\alpha}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} - \left(v^\alpha + \frac{v^2 X^\alpha}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} - \frac{X^\alpha(\vec{X} \cdot \vec{a})}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} \right) \right). \end{aligned} \quad (G.23)$$

(G.20), (G.21), (G.22) და (G.23)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} L + M &= \\ &= \frac{1}{X - \vec{X} \cdot \vec{v}} \left(\frac{\partial}{\partial l} (\mu^{k_0}(l) \gamma^{-1}(l)) \right) \Big|_{l=t''} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t'')}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} v^\alpha(t'') \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu^{k_0}(t'') \gamma^{-1}(t'')}{X^0 - \vec{X} \cdot \vec{v}} \right) \Big|_{R=X^0}, \end{aligned} \quad (G.24)$$

რაც ამტკიცებს (G.6) და, მაშასადამე, (G.2)-ის ტოლობის სამართლიანობას.

Н. თეორემა გადაგვარებული ელიფსოიდების ქვესივრცის კო-განზომილების შესახებ ზოგადი ელიფსოიდების სივრცეში (ვ. არნოლდის თეორემის დაზუსტება)

ა) ამ დამატებაში ნაჩვენებია, რომ არნოლდის ცნობილი თეორემა [63] მოითხოვს დაზუსტებას. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები მოხსენებულია კონფერენციაზე [8] (იხ. ჩამონათვალი გვ. 11-ზე), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტისა და დუბნის ბირთვული გამოკვლევების გაერთიანებული ინსტიტუტის ინფორმაციული ტექნოლოგიების ლაბორატორიის (LIT JINR, Dubna) სემინარებზე და გამოქვეყნებულია ნაშრომში [64].

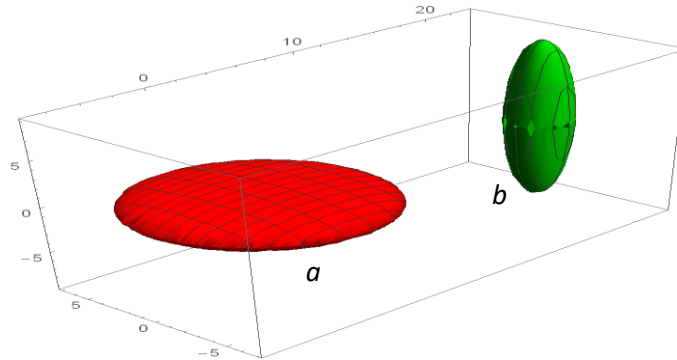
არნოლდის თეორემა ჩამოყალიბებულია მონოგრაფიაში «Математические методы классической механики» [63] და ეხება ზოგიერთი მათემატიკური და ფიზიკური სტრუქტურის დახასიათება – აღწერას ინვარიანტების საშუალებით n -განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში ორთოგონალური გარდაქმნების (ზოგად შემთხვევაში – n -განზომილებიან უნიტარულ სივრცეში უნიტარული გარდაქმნების) მიმართ. ასეთ ინვარიანტებს ფართოდ იყენებენ ფიზიკური პროცესების აღსაწერად და მათემატიკურ გამოკვლევებში (იხ. [66] და იქ ციტირებული წყაროები). ჩვენ ვიყენებთ ამ მეთოდს დისერტაციის მე-2 და მე-3 თავებში.

არნოლდის თეორემა აფიქსირებს ბრუნვის ელიფსოიდების ქვესივრცის კო-განზომილებას ელიფსოიდების ზოგად სიმრავლეში (ქვესივრცის განზომილების და კო-განზომილების ჯამი ტოლია სივრცის განზომილებისა). თეორემის დამტკიცების პროცესში არნოლდი მიიჩნევს, რომ ნამდვილ n -განზომილებიან სივრცეში ($n \geq 2$) ელიფსოიდი ერთი 2-ჯერადად გადაგვარებული საკუთარი ღერძით (ანუ ერთი ბრუნვის ღერძის მქონე ელიფსოიდი) ხასიათდება $(n^2 + n - 4) / 2$ პარამეტრით, რომლებიც განიხილება როგორც წერტილის კოორდინატები ამ ელიფსოიდების $n(n+1) / 2$ -განზომილებიან სივრცეში.

მაგალითად, 3-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში ელიფსოიდი ხასიათდება ეილერის 3 კუთხით, რომელიც მისი ღერძების დახრას აღწერს კოორდინატთა ღერძების მიმართ და სამი ნახევარღერძის სიგრძით – $n(n+1) / 2 = 6$. ხოლო ბრუნვის ელიფსოიდი, რომელსაც 2 ღერძი ტოლი აქვს, ხასიათდება ეილერის 2 კუთხით და 2 ნახევარღერძის სიგრძით $(n^2 + n - 4) / 2 = 4$.

ჩვენი აზრით, ბრუნვის ელიფსოიდების სრული აღწერისთვის (ელიფსოიდების კლასიფიცირებისთვის) აუცილებელია კიდევ ერთი (დისკრეტული) პარამეტრი – უნდა ვიცოდეთ, ცნობილი ორი (ერთმანეთისგან განსხვავებული) ნახევარღერძიდან რომელია ორჯერადად გადაგვარებული – მეტი თუ ნაკლები სიგრძის მქონე. მხოლოდ ეს

ინფორმაცია განასხვავებს ერთმანეთისგან ბრუნვის წაგრძელებულ და შებრტყელებულ ელიფსოიდებს, რომელთა ნახევარღერძების სიგრძეები ერთნაირია, მაგრამ ბრუნვის ღერძი ერთ შემთხვევაში გრძელია (ნახ. 6a), მეორე შემთხვევაში კი – მოკლე (ნახ. 6b).



ნახ. 6. ბრუნვის ელიფსოიდები: a – შებრტყელებული, b – წაგრძელებული.

ცხადია, ასეთი ელიფსოიდები არ არის ორთოგონალურად ექვივალენტური, ანუ არ მიიღება ერთმანეთისგან ორთოგონალური გარდაქმნით.

b) არნოლდს, მის მიერ ჩამოყალიბებული თეორემიდან, გამოჰყავს მნიშვნელოვანი

შედეგი: ბრუნვის ელიფსოიდების ქვესივრცე არ არის ზოგადი ელიფსოიდების $n(n+1)/2$ -განზომილებიანი სივრცის გამყოფი (მსგავსად იმისა, რომ წრფე არ არის 3-განზომილებიანი სივრცის გამყოფი, სიბრტყე კი – არის) და, შედეგად, ნებისმიერი ორი „წერტილი“ ზოგადი ელიფსოიდების $n(n+1)/2$ -განზომილებიან სივრცეში შეიძლება შევაერთოდ უწყვეტი „წირით“, რომელიც არ გაივლის ბრუნვის ელიფსოიდების ქვესივრცის „წერტილებზე“.

დამტკიცებისას არნოლდი ეყრდნობა მის თეორემაში ჩამოყალიბებულ დებულებას, რომ გადაგვარებული (ბრუნვის ღერძის მქონე) ელიფსოიდების სივრცე არის სასრული გაერთიანება გლუვი ქვე-მრავალსახეობებისა, რომელთა k -განზომილება ყველა ელიფსოიდების სივრცეში ≥ 2 .

არნოლდის თეორემის შედეგი, თავის მხრივ, მნიშვნელოვანია მექანიკისა და ფიზიკის მრავალი ამოცანის (მათ შორის გამოყენებითი მნიშვნელობის ამოცანების, როგორიცაა, მაგალითად, ტურბინების როტორების, ძრავების მქნევარების, ავტო-მანქანების ბორბლების ბალანსირების – საკომპენსაციო ტვირთების შერჩევისა და განლაგების ამოცანები და სხვ.) გადაწყვეტისას და შეიძლება ჩაითვალოს ექსპერიმენტულად დამტკიცებულ დებულებად.

ჩვენ ვეთანხმებით არნოლდის მიერ ჩამოყალიბებული თეორემის შედეგის შინაარსს, მაგრამ მიგვაჩნია, რომ მისი არნოლდისეული დამტკიცება ეყრდნობა მცდარ მოსაზრებას, რომელიც ჩამოყალიბებულია არნოლდის თეორემაში. კერძოდ, როგორც აღვნიშნეთ, გადაგვარებული (ბრუნვის ღერძის მქონე) ელიფსოიდების ქვესივრცის კო-განზომილება ყველა ელიფსოიდების სივრცეში საზოგადოდ ≥ 1 (და არა ≥ 2).

ამრიგად, არნოლდის თეორემა მოითხოვს დაზუსტებას, ხოლო თეორემიდან გამოყვანილი შედეგი – ახლებურ დამტკიცებას. ორივე ეს ამოცანა გადაჭრილია ნაშრომში [64]. კერძოდ, თანახმად ზემოთ ნაჩვენებისა, არნოლდის თეორემა უნდა ჩამოყალიბდეს შესწორებული სახით:

თეორემა. *ბრუნვის ელიფსოიდების სიმრავლე არის გლუვ ქვემრავალსახეობათა სასრული გაერთიანება, რომელთა კო-განზომილებები ყველა ელიფსოიდის სივრცეში არ არის ნაკლები 1-ზე.*

არნოლდის თეორემის ზემოთჩამოყალიბებული შედეგის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ თანახმად ფ. კლაინის ერლანგენის პროგრამისა [65], ნებისმიერი გეომეტრიული ობიექტი უნდა განვიხილოთ, როგორც ინვარიანტი ამა თუ იმ ჯგუფის გარდაქმნათა მიმართ. ამასთან, გეომეტრიის თეორემები წარმოადგენს თანაფარდობებს ამ ჯგუფის ინვარიანტებს შორის (ორთოგონალური გარდაქმნების ჯგუფს შეესაბამება ევკლიდური გეომეტრია). ამიტომ, ელიფსოიდები უნდა აღვწეროთ მათი ორთოგონალური ინვარიანტებით, კერძოდ, საკუთარი ღერძების ნახევარსიგრძეებით (ანუ კვადრატული ფორმის საკუთარი მნიშვნელობებით). მაშინ ცხადია, რომ გადაგვარებული ელიფსოიდების ქვესივრცე წარმოადგენს ყველა ელიფსოიდის სივრცის საზღვარს და, ამდენად, არ შეიძლება იყოს ყველა ელიფსოიდის სივრცის გამყოფი.

ილუსტრაციისთვის ნაშრომში [64] განხილულია 3-განზომილებიანი სივრცის მაგალითი. განვიხილოთ $\mathbb{R}^3$ სივრცეში ელიფსოიდის შესაბამისი კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე, რაც განისაზღვრება მხოლოდ ფორმის საკუთარი მნიშვნელობებით – ელიფსოიდის ნახევარღერძების სიგრძეებით

$$0 \leq a \leq b \leq c. \quad (\text{H.1})$$

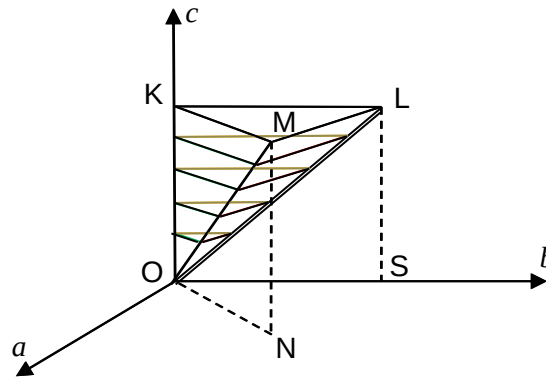
a, b, c პარამეტრების სივრცეში გადაგვარებული (ბრუნვის) ელიფსოიდები ქმნის ფორმების ამ სიმრავლის საზღვარს

$$0 \leq a = b \cup b = c \quad (\text{H.2})$$

– ორი (2-განზომილებიანი) ნახევარსიბრტყის გაერთიანებას. ამ ნახევარსიბრტყეთა თანაკვეთა – სხივი

$$0 \leq a = b = c \quad (\text{H.3})$$

გადის a, b, c პარამეტრების სივრცის კოორდინატთა სათავეზე (ნახ. 7).



ნახ. 7. ელიფსოიდების სივრცის და მისი საზღვრის სტრუქტურა
3-განზომილებიან სივრცეში.

KO – მონაკვეთები (გადაგვარებული ელიფსები); KLO – ელიფსები;
LO – წრეწირები; LMO – წაგრძელებული ელიფსოიდები; MO – სფეროები;
MKO – შებრტყელებული ელიფსოიდები.

ამრიგად, ბრუნვის ელიფსოიდების შესაბამის წერტილთა სიმრავლეები, მართლაც, არ ყოფნენ a, b, c პარამეტრების სივრცეს: ამ სივრცის ნებისმიერი ორი შიგა წერტილი შეიძლება შევაერთოთ უწყვეტი წირით, რომელიც მთლიანად შედგება სივრცის შიგა წერტილებისგან. მეტიც, საზღვრის ნებისმიერი ორი წერტილი – ბრუნვის ელიფსოიდები – ასევე შეიძლება შევაერთოდ წირით, რომელიც მთლიანად შედგება ელიფსოიდების სივრცის შიგა წერტილებისგან – არ შეიცავს წერტილებს, რომლებიც შეესაბამება გადაგვარებულ ელიფსოიდებს. (ეს წინადადებები სიტყვა-სიტყვით იმეორებს არნოლდის წინადადებებს [63].) აქედან გამომდინარეობს არნოლდის თეორემის შედეგის სამართლიანობა ჩვენ მიერ თეორემაში შეტანილი შესწორების მიუხედავად. ამასთან, რამდენადაც a, b, c პარამეტრების სივრცის საზღვარი (H.2) არ არის 2-განზომილებიანი, წერტილის მდებარეობა საზღვარზე აიწერება 3 კოორდინატით, თუ წინასწარ არ არის ცნობილი, საზღვრის რომელ წახნაგს ეკუთვნის ეს წერტილი, ანუ ბრუნვის რომელ ელიფსოიდზე – წაგრძელებულზე $0 \leq a = b < c$, თუ შებრტყელებულზე $0 \leq a < b = c$ – არის საუბარი; სხივი (H.3) შედგება სხვადასხვა რადიუსის სფეროების შესაბამისი წერტილებისგან.

შევნიშნოთ, რომ 3-განზომილებიან სივრცეში ბრტყელი მოძრაობის ტრაექტორიის სრული აღწერისთვის საჭიროა 3 კოორდინატის მითითება (იხ. თავი 3) – ვინაიდან, სიბრტყეში წერტილის მდებარეობის გარდა, აუცილებელია სივრცეში ტრაექტორიის სიბრტყის განლაგების მითითებაც.