ამოცანა 1:

(ამოცანის ავტორი: Stijn Cambie)

იპოვეთ დადებით მთელ რიცხვთა ყველა (a,b,c) სამეული, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$a! + b! = c!!$$

$\left((2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k, \quad (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)\right)$

ამოხსნა:

პასუხი: $(1,1,2)$; $(1,2,3)$; $(2,1,3)$; $(2,3,4)$; $(3,2,4)$; $(4,4,6)$

თუ დადებით მთელ რიცხვთა (a,b,c) სამეული აკმაყოფილებს ამოცანის, პირობას, მაშინ მას დააკმაყოფილებს (b,a,c) სამეულიც. ამიტომ, ზოგადობის დაურღვევლად დავუშვათ, რომ $a \le b$.

თუ c რიცხვი კენტია, მაშინ $a! + b!$ კენტია, ესე იგი $a = 1$ და $b > 1$. თუ $b = 2$, მაშინ ვიღებთ ერთ სამეულს: $(1,2,3)$. ხოლო თუ $b > 2$, მაშინ $b! \vdots 3$ და $a! + b! \equiv 1 (mod\ 3)$. ანუ $c!!$ არ იყოფა 3-ზე, რაც შეუძლებელია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა c რიცხვი ლუწია. პირობა გადავწეროთ შემდეგნაირად: $a!\left(\frac{b!}{a!} + 1\right) = c!!$. თუ $b \ge a + 2$, მაშინ $\left(\frac{b!}{a!} + 1\right)$ კენტია. ესე იგი $\upsilon_2(a!) = \upsilon_2(c!!)$. აქედან ცხადია ვიღებთ რომ $a \ge c$ და, შესაბამისად, $a! + b! > c! \ge c!!$. ესე იგი $b = a$ ან $b = a + 1$.

თუ $b = a$, მაშინ $a! + a! = 2 \cdot a! = c!!$. ცხადია, რომ თუ $c \ge a + 3$, მაშინ $c!!$-ში მინიმუმ ორი ლუწი (c და $c - 2$) თანამამრავლი მაინც არის, რომლებიც არ გვხვდება $a!!$-ში, რაც ნიშნავს, რომ $\upsilon_2(2 \cdot a!) < \upsilon_2(c!!)$. თუ $c \le a$, მაშინ ცხადია $\upsilon_2(2 \cdot a!) > \upsilon_2(c!!)$. გვრჩება მხოლოდ ორი შემთხვევა: $c = a + 1$ და $c = a + 2$. პირველ შემთხვევაში გვაქვს: $2 \cdot a! = (a+1)!!$. ამ ტოლობას თუ $a!$-ის ლუწ თანამამრავლებზე შევკვეცავთ, მივიღებთ $2 \cdot a!! = a + 1$. ანუ $a + 1 = 2 \cdot a!! \ge 2a$ და $a = 1$. ვიპოვეთ კიდევ ერთი სამეული: $(1,1,2)$. ხოლო მეორე შემთხვევაში, როცა $c = a + 2$, მაშინ: $2 \cdot a! = (a+2)!!$. ამ ტოლობას თუ $a!$-ის ლუწ თანამამრავლებზე შევკვეცავთ, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას: $2 \cdot (a-1)!! = a + 2$. ანუ $a + 2 = 2 \cdot (a-1)!! \ge 2(a-1)$ და $a \le 4$. ცხადია, რომ $a = 2$ არ გვაძლევს ამონახსნს. ხოლო, თუ $a = 4$, მაშინ ვიღებთ ახალ სამეულს: $(4,4,6)$.

დაგვრჩა შემთხვევა, როცა $b = a + 1$. ანუ $a! + (a+1)! = c!!$. საიდანაც $(a+2)a! = c!!$. აქ თუ $c \le a$, მაშინ $a!$-ში ყველა ის თანამამრავლი გვხვდება, რაც შედის $c!!$-ში და ტოლობა ვერ შესრულდება. ესე იგი $c > a$. თუ a კენტია, მაშინ ცხადია, რომ $\upsilon_2\left((a+2)a!\right) < \upsilon_2(c!!)$. ესე იგი a ლუწია და შესაბამისად $(a+2)a! \le (a+2)!! \le c!!$. ტოლობები მიიღწევა მხოლოდ, მაშინ, როცა $a + 2 = c$ და $a! = a!!$. აქედან $a = 2$ და მივიღეთ კიდევ ერთი სამეული: $(2,3,4)$.

$\upsilon_2(n)$ აღნიშნავს n რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-იანების რაოდენობას.

ამოცანა 2:

(ამოცანის ავტორი: Gurgen Asatryan)

იპოვეთ $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ და $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ ფუნქციების ყველა წყვილი, რომელთათვისაც ტოლობები

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)+g(x)\cdot g(y)$$

$$g(x+y)=f(x)\cdot g(y)+g(x)\cdot f(y)+g(x)\cdot g(y)$$

სამართლიანია ყოველი რაციონალური x და y რიცხვებისთვის.

($\mathbb{Q}$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო $\mathbb{R}$ - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე)

ა მ ო ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: $f(x)=\frac{5-\sqrt{5}}{10}a^x+\frac{5+\sqrt{5}}{10}b^x$ და $g(x)=\frac{\sqrt{5}}{5}a^x-\frac{\sqrt{5}}{5}b^x$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

ვთქვათ λ ისეთი რიცხვია, რომ $\lambda^2=\lambda+1$. ასეთი ორი ნამდვილი რიცხვი არსებობს: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ და $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. განვიხილოთ შემდეგი ნამრავლი:

$$\begin{aligned}\big(f(x)+\lambda\cdot g(x)\big)\big(f(y)+\lambda\cdot g(y)\big)&=f(x)g(x)+\lambda\cdot\big(f(x)g(y)+g(x)f(y)\big)+\lambda^2\cdot g(x)g(y)=\\&=f(x)g(x)+\lambda\cdot\big(f(x)g(y)+g(x)f(y)\big)+(\lambda+1)\cdot g(x)g(y)=\\&=f(x)g(x)+\lambda\cdot\big(f(x)g(y)+g(x)f(y)\big)+\lambda\cdot g(x)g(y)+g(x)g(y)=\\&=f(x)\cdot f(y)+g(x)\cdot g(y)+\lambda\cdot\big(f(x)g(y)+g(x)f(y)+g(x)g(y)\big)=\\&=f(x+y)+\lambda\cdot g(x+y)\end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ თუ $\phi_1(x)=f(x)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot g(x)$, მაშინ $\phi_1(x+y)=\phi_1(x)\cdot\phi_1(y)$ და, ასევე, თუ $\phi_2(x)=f(x)+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot g(x)$, მაშინ $\phi_2(x+y)=\phi_2(x)\cdot\phi_2(y)$. ანუ, თუ $\phi_1(1)=a$ და $\phi_2(1)=b$, მაშინ $\phi_1(x)=a^x$ და $\phi_2(x)=b^x$. ესე იგი

$$f(x)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot g(x)=a^x$$

$$f(x)+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot g(x)=b^x$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარე კი გვექნება: $g(x)=\frac{\sqrt{5}}{5}a^x-\frac{\sqrt{5}}{5}b^x$ და $f(x)=\frac{5-\sqrt{5}}{10}a^x+\frac{5+\sqrt{5}}{10}b^x$. შემოწმებით ვასკვნით, რომ ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობას ნებისმიერი ნამდვილი a და b რიცხვებისთვის.

ამოცანა 3:

(ამოცანის ავტორი: ზაზა მელიქიძე)

მოცემულია ამოზნექილი $ABCD$ ოთხკუთხედი, რომელშიც $AC > BD$. ამ ოთხკუთხედის სიბრტყეში აღებულია ისეთი M და N წერტილები, რომ ABM და CDN სამკუთხედები ტოლგვერდაა და MD და MA მონაკვეთები კვეთენ, შესაბამისად, AB და CD წრფეებს. ასევე, ამავე სიბრტყეში აღებულია ისეთი P და Q წერტილები, რომ ADP და BCQ სამკუთხედები ტოლგვერდაა, მაგრამ ამ შემთხვევაში PB და QA მონაკვეთები **არ** კვეთენ, შესაბამისად, AD და BC წრფეებს.

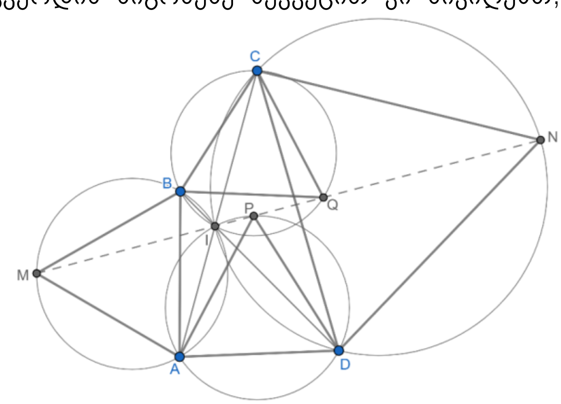
დაამტკიცეთ, რომ $MN = AC + BD$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $PQ = AC - BD$.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

პირველი რიგში დავამტკიცოთ შემდეგი ცნობილი ლემა:

ლემა: თუ XYZ ტოლგვერდა სამკუთხედია, ხოლო T ნებისმიერი წერტილია ამავე სიბრტყეში, მაშინ $TX + TY \geq TZ$. ტოლობა კი მიიღწევა მხოლოდ მაშინ, როდესაც T წერტილი მდებარეობს XYZ სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე.

ლემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ ცნობილი თეორემა: პტოლემეოსის უტოლობის თანახმად (https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy%27s_inequality) გვექნება: $TX \cdot YZ + TY \cdot XZ \geq TZ \cdot XY$, სადაც ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ მაშინ, როცა T წერტილი მდებარეობს XYZ სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდის სიგრძეზე შეკვეცით კი მივიღებთ, სასურველ უტოლობას.



თუ I არის AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ $IA + IB \geq IM$ და $IC + ID \geq IN$. ამ უტოლობების შეკრებით ვიღებთ $AC + BD \geq IM + IN$. ესე იგი პირობა $MN = AC + BD$ ტოლფასია იმისა, რომ I წერტილი მდებარეობს როგორც ABM, ასევე CDN სამკუთხედებზე შემოხაზულ წრეწირებზე და MN წრფეზე. მვიღეთ, რომ პირობა $MN = AC + BD$ ტოლფასია იმისა, რომ AC, BD და MN წრფეები იკვეთებიან ერთ წერტილში 60^{o}-იანი კუთხეებით.

ყურადღება მივაქციოთ, რომ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა ჭეშმარიტია მაშინაც, როცა $ABCD$ ოთხკუთხედი არის ჩაზნექილი. ესე იგი, თუ განვიხილავთ $DPBQ$ ოთხკუთხედს და გავიაზრებთ ანალოგიურ წინადადებას, გვექნება შემდეგი რამ: პირობა $AC = BD + PQ$ ტოლფასია იმისა, რომ BD, PQ და AC წრფეები იკვეთებიან ერთ წერტილში 60^{o}-იანი კუთხეებით. ცხადია, რომ თუ $\angle AID = 60^{o}$, მაშინ, როგორც M და N, ასევე P და Q წერტილები მდებარეობენ AIB კუთხის ბისექტრისაზე. ესე იგი $MN = AC + BD$ ტოლფასია იმისა, რომ $PQ = AC - BD$.