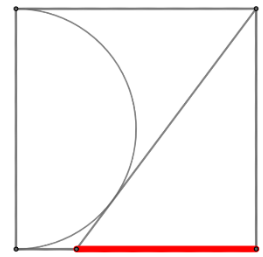
ამოცანა 1.

ა) დაამტკიცეთ, რომ თუ $a + b + c = 0$, მაშინ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

ბ) ამოხსენით განტოლება $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0$ ნამდვილ რიცხვებში.

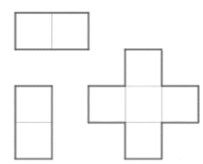


ამოცანა 2. მოცემულია ერთეულოვანი $ABCD$ კვადრატი. კვადრატის შიგნით აგებულია AB დიამეტრიანი ნახევარწრეწირი. C წერტილიდან ამ ნახევარწრეწირისადმი გავლებული მხები AD გვერდს გადაკვეთს E წეტილში. იპოვეთ DE მონაკვეთის სიგრძე.

ამოცანა 3. ვთქვათ, ნატურალურ n რიცხვს აქვს $k \geq 4$ რაოდენობის ნატურალური გამყოფი. მისი ყველა გამყოფი ჩამოვწეროთ ზრდადობით: $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \cdots < d_k = n$. იპოვეთ ყველა ისეთი n, რომლისთვისაც

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

ამოცანა 4. შესაძლებელია თუ არა 75×75 ზომის მართკუთხა ცხრილი დაიჭრას „დომინოებად“ და „პლიუსებად“? („დომინო“ არის 1×2 ან 2×1 ზომის მართკუთხედი, ხოლო „პლიუსი“ შედგება ხუთი უჯრისგან, რომელიც მიიღება რომელიმე კვადრატის და მისი ოთხივე მეზობლის გაერთიანებით)



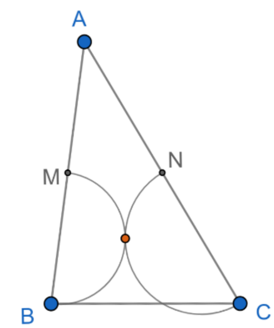
ამოცანა 5. მოცემულია $ABCDE$ ამოზნექილი ხუთკუთხედი. ცნობილია, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია და $CB = CE$. დაამტკიცეთ, რომ AE და CD გვერდების შუა წერტილებზე გამავალი წრფე BE დიაგონალის მართობულია.

ამოცანა 6. სიბრტყეზე აღებულია 100 წერტილი. ყოველ ორ მათგანზე გავლებულია წრფე. იპოვეთ მიღებული წრფეების გადაკვეთის წერტილთა მაქსიმალური შესაძლო რაოდენობა.

ამოცანა 7. ნატურალურ რიცხვს ვუწოდოთ *კარგი,* თუ მის ყველა ნატურალურ გამყოფთა შორის ზუსტად ორი არის მარტივი. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ 18 მომდევნო ნატურალურ რიცხვს შორის ერთი მაინც **არ** იქნება კარგი.

ამოცანა 8. ოთახში არის 25 ადამიანი. თითოეული იცნობს ზუსტად 4-ს დანარჩენებიდან. (ნაცნობობა ორმხრივია). აღმოჩნდა, რომ ისეთი სამეულების რაოდენობა, რომელშიც ყველა ყველას იცნობს, არის k. იპოვეთ k-ს უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოცანა 9. ვთქვათ a და b განსხვავებული დადებითი მთელი რიცხვებია. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ნამდვილი x რიცხვი, რომლისთვისაც $(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$.



ამოცანა 10: ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდების შუა წერტილებია, შესაბამისად, M და N. დაამტკიცეთ, რომ თუ MB და NC დიამეტრიანი ნახევარწრეწირები ერთმანეთს ეხებიან, მაშინ შეხების წერტილი მდებარეობს A კუთხის ბისექტრისაზე.

ამოცანა 11. იპოვეთ უდიდესი რიცხვი, რომელიც ხუთჯერ მცირდება პირველი ციფრის წაშლით და რომელშიც ყველა ციფრი განსხვავებულია. (პირველ ციფრში იგულისხმება უკიდურესი მარცხენა ციფრი)

ამოცანა 12. ამოხსენით განტოლება ნამდვილ რიცხვებში:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

ამოცანა 13. იპოვეთ ყველა მარტივი $p>2$ რიცხვი, რომლისთვისაც რიცხვები $\frac{p+1}{2}$ და $\frac{p^2+1}{2}$ ორივე არიან რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატები.

ამოცანა 14. 8×8 ზომის კვადრატული ცხრილის ზოგიერთი უჯრა შეღებილია შავად, ხოლო დანარჩენები - თეთრად ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. ჩვენ უფლება გვაქვს ავირჩიოთ ნებისმიერი სვეტი ან სტრიქონი და ამ სვეტში ან სტრიქონში რვავე უჯრას ფერი შევუცვალოთ საპირისპიროთი. ასეთი ოპერაციების მრავალჯერ ჩატარების შემდეგ, მაქსიმუმ რამდენი შავი უჯრის მიღება არის შესაძლებელი მთლიან ცხრილში?