

თილერის თლიშვიადა. მეორე ტური. (მეორე სესია)

ამოცანები

ამოცანა 4:

(ამოცანის ავტორი: Stijn Cambie)

იპოვეთ ყველა $f: \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ფუნქცია თუ ცნობილია, რომ ნებისმიერი $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ რიცხვებისთვის $f(xy) = f(x)f(y)$ და $f(x+y) = f(x) + f(y)$, სადაც $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

($\mathbb{Q}$ აღნიშნავს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.)

ამოხსნა:

პა ს უ ბ ი: $f(x) = 0$, $f(x) = x$ და $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი მთელი n და m რიცხვები. ცხადია, რომ ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი არის $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ სიმრავლის ელემენტი. ამიტომ

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + f(1) + f(1) = \dots = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_n = n \cdot f(1)$$

და, ასევე, $n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) + (n-2) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{3}{n}\right) + (n-3) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \dots = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1)$. ანუ $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(1)$. მივიღეთ, რომ $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m-1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{m-2}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \dots = \frac{m}{n} \cdot f(1)$.

ანალოგიურად

$$f(n\sqrt{2}) = f((n-1)\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = \dots = \underbrace{f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{2})}_n = n \cdot f(\sqrt{2})$$

და, ასევე, $n \cdot f\left(\frac{1}{n}\sqrt{2}\right) = f\left(\frac{2}{n}\sqrt{2}\right) + (n-2) \cdot f\left(\frac{1}{n}\sqrt{2}\right) = \dots = f\left(\frac{n}{n}\sqrt{2}\right) = f(\sqrt{2})$. შესაბამისად $f\left(\frac{1}{n}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(\sqrt{2})$. მივიღეთ, რომ $f\left(\frac{m}{n}\sqrt{2}\right) = f\left(\frac{m-1}{n}\sqrt{2}\right) + f\left(\frac{1}{n}\sqrt{2}\right) = \dots = \frac{m}{n} \cdot f(\sqrt{2})$.

დამტკიცდა, რომ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური x რიცხვისთვის $f(x) = x \cdot f(1)$ და $f(x\sqrt{2}) = x \cdot f(\sqrt{2})$. პირობიდან გამომდინარე ვიცით, რომ ნებისმიერი რაციონალური x რიცხვისთვის $f(x) + f(0) = f(x)$, ანუ $f(0) = 0$. ასევე, ნებისმიერი რაციონალური x რიცხვისთვის $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, ანუ $f(-x) = -f(x)$. ესე იგი ნებისმიერი რაციონალური x რიცხვისთვის $f(x) = x \cdot f(1)$ და $f(x\sqrt{2}) = x \cdot f(\sqrt{2})$.

განვიხილოთ ნებისმიერი რაციონალური $a \in \mathbb{Q}$ და $b \in \mathbb{Q}$ რიცხვები. რადგან $a = a + 0 \cdot \sqrt{2}$ და $b\sqrt{2} = 0 + b\sqrt{2}$, ამიტომ $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ და $b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. ესე იგი სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა: $f(a + b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2})$. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად $f(a) = a \cdot f(1)$ და $f(b\sqrt{2}) = b \cdot f(\sqrt{2})$. ესე იგი $f(a + b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2})$.

გავარკვიოთ, რას შეიძლება უდრიდნენ $f(1)$ და $f(\sqrt{2})$. ცხადია, რომ $f(1) = f(1)^2$. აქედან $f(1) = 0$ ან $f(1) = 1$. თუ $f(1) = 0$, მაშინ $f(x) = f(x)f(1) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. ხოლო თუ $f(1) = 1$, მაშინ $f(\sqrt{2})^2 = f(\sqrt{2}^2) = f(2) = 2 \cdot f(1) = 2$. ესე იგი $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ან $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. საბოლოოდ $f(a + b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ ან $f(a + b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$. შემოწმებით ვიღებთ, რომ სამივე ფუნქცია: $f(x) = 0$; $f(x) = x$ და $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

ამოცანა 5:

(ამოცანის ავტორი: ლუკა წულაია)

მოცემულია უჯრების სტრიქონი, რომელიც ორივე მიმართულებით უსასრულოდ გრძელდება. სტრიქონის ზოგიერთ უჯრაში მოთავსებულია ერთი ან რამდენიმე კენჭი. კენჭების საერთო რაოდენობა სასრულია. მოთამაშე ყოველ ჯერზე ასრულებს შემდეგი სამი სვლიდან რომელიმეს:

1. ერთერთი უჯრიდან იღებს სამ კენჭს და ამ უჯრიდან თითო უჯრის გამოტოვებით მარცხნივ და მარჯვნივ უჯრებში ამატებს თითო კენჭს.

	+1			-3			+1	
--	----	--	--	----	--	--	----	--

2. ერთერთი უჯრიდან იღებს ორ კენჭს და ამ უჯრის მარცხნივ ერთი უჯრის გამოტოვებით და მარჯვნივ მეზობელ უჯრაში ამატებს თითო კენჭს.

	+1			-2	+1			
--	----	--	--	----	----	--	--	--

3. რომელიმე ორი მეზობელი უჯრიდან იღებს თითო კენჭს და მარჯვნივ მეზობელ უჯრაში ამატებს ერთ კენჭს.

			-1	-1	+1			
--	--	--	----	----	----	--	--	--

პროცესი სრულდება მაშინ, როდესაც სვლის გაკეთება შეუძლებელია. დაამტკიცეთ, რომ პროცესი აუცილებლად დასრულდება და კენჭების საბოლოო განლაგება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ იმოქმედებს მოთამაშე.

ამოხსნა:

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ კენჭები მარცხნივ უსასრულოდ შორს ვერ მოხვდებიან. ანუ კენჭებისგან მარცხნივ არსებობს უჯრა, რომელშიც ვერასოდეს მოხვდება ვერცერთი კენჭი. ცხადია, რომ ყველა კენჭი უსასრულოდ მარცხნივ ვერ მოხვდება, რადგან უკიდურესი მარჯვენა უჯრა, რომელშიც არის კენჭი, ან უცვლელია, ან მიიწევს მარჯვნივ. ანუ ერთი კენჭი მაინც არსებობს, ვინც არ წავა მარცხნივ უსასრულოდ შორს. ახლა დავუშვათ, რომ რაღაც $x \geq 1$ რაოდენობის კენჭი გადაადგილდება მარცხნივ უსასრულოდ შორს, ხოლო დანარჩენი ყველა კენჭი ვერ გაცდება კონკრეტულ უჯრას მარცხენა მიმართულებით. ასეთ სიტუაციაში საკმარისად ბევრი სვლის შემდეგ მარცხენა უსასრულობაში მიმავალი x რაოდენობის კენჭი იზოლირდება დანარჩენებისგან, ანუ შეგვიძლია აღვიქვათ, რომ მოთამაშე მხოლოდ ამ x კენჭზე თამაშობს და მივიღებთ, რომ მოთამაშეს ყველა კენჭი მიჰყავს მარცხენა უსასრულობაში, რაც, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შეუძლებელია. ანუ ვაჩვენეთ, რომ ყველა კენჭის მარცხნივ არსებობს უჯრა, რომელშიც ვერცერთი კენჭი ვერ მოხვდება. ეს უჯრა იყოს ნულოვანი უჯრა, ხოლო დანარჩენი უჯრები გადავნიშნოთ მთელი რიცხვებით ისევე, როგორც არიან მთელი რიცხვები განლაგებულნი რიცხვით ღერძზე.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ პროცესი აუცილებლად დასრულდება. ცხადია, რომ პირველი და მესამე სვლის შედეგად კენჭების რაოდენობა მცირდება, ამიტომ რაღაც მომენტი ამ სვლების გაკეთება აუცილებლად შეწყდება და მოთამაშეს მოუწევს მხოლოდ მეორე სვლის გაკეთება. ჩვენც ამ მომენტიდან დავაკვირდეთ პროცესს. ვთქვათ, i -ურ უჯრაში მყოფი კენჭების რაოდენობა არის n_i . განვიხილოთ შემდეგი ჯამი:

$$S = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot n_i$$

ცხადია, რომ ყოველ სვლაზე ეს ჯამი შემცირდება ერთით, რადგან $-2i + (i - 2) + (i + 1) = -1$. ასევე, ცხადია, რომ ეს ჯამი S ყოველთვის დადებითი უნდა იყოს, რადგან ყველა უჯრედის ნომერი სადაც ერთი კენჭი მაინც იქნება, ყოველთვის დადებითია. ეს ყველაფერი ამტკიცებს, რომ პროცესი აუცილებლად დასრულდება.

ვაჩვენოთ, რომ პროცესის დასრულების შემდეგ კენჭების განლაგება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ იმოქმედებს მოთამაშე. შემოვიღოთ ფიბონაჩის მიმდევრობა: $F_1 = F_2 = 1$ და $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$, $\forall i \geq 1$. განვიხილოთ შემდეგი ჯამი:

$$F = \sum_{i=1}^{+\infty} F_i \cdot n_i$$

დავაკვირდეთ ამ ჯამის ცვლილებას პირველი სვლის ჩატარებისას:

$$-3F_i + F_{i-2} + F_{i+2} = (F_{i-2} - F_i) + (F_{i+2} - F_i) - F_i = -F_{i-1} + F_{i+1} - F_i = 0$$

ანუ F ჯამი არ შეიცვალა. ახლა განვიხილოთ მეორე სვლის ჩატარებისას F ჯამის ცვლილება:

$$-2F_i + F_{i-2} + F_{i+1} = (F_{i-2} - F_i) - F_i + F_{i+1} = -F_{i-1} - F_i + F_{i+1} = 0$$

ამ შემთხვევაშიც არ შეიცვალა F ჯამი. განვიხილოთ მესამე სვლის ჩატარებისას F ჯამის ცვლილება

$$-F_i - F_{i+1} + F_{i+2} = 0$$

ისევ არ შეიცვალა F ჯამი. მივიღეთ, რომ საბოლოო პოზიციის შემთხვევაში F ჯამი წინასწარ განსაზღვრულია და არ არის დამოკიდებული მოთამაშის ქმედებებზე.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს მოთამაშის ორი განსხვავებული მოქმედება, რომელთა შედეგად კენჭების საბოლოო განლაგება განსხვავებულია. ცხადია, რომ ნებისმიერი საბოლოო განლაგებისას არცერთ უჯრაში არ არის 1-ზე მეტი კენჭი და არცერთი ორი კენჭი არ არის მოთავსებული მეზობელ უჯრებში. ანუ ჩვენ გვექნება ინდექსთა ორი სისტემა: $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ და $b_1 < b_2 < \dots < b_t$, სადაც, $a_{i+1} \geq a_i + 2$, $\forall i = 1, 2, \dots, k - 1$ და $b_{i+1} \geq b_i + 2$, $\forall i = 1, 2, \dots, t - 1$. F ჯამის მუდმივობის გამო შესრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$F_{a_1} + F_{a_2} + \dots + F_{a_k} = F_{b_1} + F_{b_2} + \dots + F_{b_t}$$

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_k \neq b_t$, რადგან ორივე მხარეს მაქსიმალური წევრების დამთხვევისას, ჩვენ შეგვიძლია მათი გაბათილება. ზოგადობის დაურღვევლად ჩავთვალოთ, რომ $a_k > b_t$.

$$\begin{aligned} F_{a_1} + F_{a_2} + \dots + F_{a_k} &\geq F_{a_k} = F_{a_k-1} + F_{a_k-2} = F_{a_k-1} + F_{a_k-3} + F_{a_k-4} = \\ &= F_{a_k-1} + F_{a_k-3} + F_{a_k-5} + F_{a_k-6} = \dots = F_{a_k-1} + F_{a_k-3} + F_{a_k-5} + \dots + 1 > \\ &> F_{a_k-1} + F_{a_k-3} + F_{a_k-5} + \dots \geq F_{b_1} + F_{b_2} + \dots + F_{b_t} \end{aligned}$$

ანუ ტოლობა გამორიცხულია. ესე იგი არ არსებობს მოთამაშის ორი განსხვავებული მოქმედება, რომელთა შედეგად კენჭების საბოლოო განლაგება განსხვავებულია.

ამოცანა 6:

(ამოცანის ავტორი: გიორგი კეკელიძე)

ნებისმიერი $S \subset \mathbb{N}$ სიმრავლისთვის $f: S \rightarrow S$ ფუნქციას დავარქვათ *საინტერესო*, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. არ არსებობს ისეთი $a \in S$ ელემენტი, რომლისთვისაც $f(a) = a$.

2. ნებისმიერი $a \in S$ ელემენტისთვის $f^{f(a)+1}(a) = a$.

დაამტკიცეთ, რომ

ა) არსებობს უსასრულოდ ბევრი საინტერესო $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია.

ბ) არსებობს უსასრულოდ ბევრი დადებითი მთელი n რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს $\{1, 2, \dots, n\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული საინტერესო $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ფუნქცია.

($f^k(a) = \underbrace{f(f(f \dots f(a) \dots))}_{k\text{-ჯერ}}$). ასევე, $\mathbb{N}$ აღნიშნავს დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს.)

ამოხსნა:

ა) ვთქვათ, ყოველი მარტივი p რიცხვისთვის, S_p არის ისეთი ნატურალურ n რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $(n+1)$ -ის მინიმალური მარტივი გამყოფი (აღვნიშნოთ $M(n+1)$ -ით) არის p .

$$S_p = \{n \in \mathbb{N} \mid M(n+1) = p\}$$

მაგალითად: $S_2 = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$; $S_3 = \{2, 8, 14, 20, 26, \dots\}$; $S_{11} = \{10, 120, 142, 186, \dots\}$ და ასე შემდეგ. ცხადია, რომ ეს სიმრავლეები ახდენენ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის დაყოფას. ანუ ყოველი ორი მათგანი თანაკვეთია და ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი ეკუთვნის ერთერთ მათგანს. ჩვენ ავაგებთ საინტერესო ფუნქციას, რომელსაც განვმარტავთ თითოეულ S_p სიმრავლეზე.

დავაფიქსიროთ ნებისმიერი მარტივი p რიცხვი და ზრდის მიხედვით გადავნიშნოთ S_p სიმრავლის ყველა ელემენტი: $S_p = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$. ამ სიმრავლის ელემენტები დავყოთ p -ეულებად: $(n_1, n_2, \dots, n_p)$; $(n_{p+1}, n_{p+2}, \dots, n_{2p})$; $(n_{2p+1}, n_{2p+2}, \dots, n_{3p})$; და ასე შემდეგ. თითოეულ p -ეულში განვმარტოთ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია: განვიხილოთ ნებისმიერი $k \geq 0$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვი და შესაბამისი p -ეული: $(n_{kp+1}, n_{kp+2}, \dots, n_{(k+1)p})$. ვთქვათ:

$$\begin{aligned} f(n_{kp+1}) &= n_{kp+2} \\ f(n_{kp+2}) &= n_{kp+3} \\ &\vdots \\ f(n_{kp+p-1}) &= n_{(k+1)p} \\ f(n_{(k+1)p}) &= n_{kp+1} \end{aligned}$$

ამ განმარტებით f ფუნქცია განისაზღვრა მთლიანად S_p სიმრავლეზე. ანალოგიურად განვსაზღვროთ ყველა S_p სიმრავლეზე, რაც გამოიწვევს f ფუნქციის განსაზღვრას მთლიანად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე. ვაჩვენოთ, რომ ეს $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია გამოვა საინტერესო.

f ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, ცხადია, რომ არ არსებობს ნატურალური a რიცხვი, რომლისთვისაც $f(a) = a$. ანუ პირველი პირობა დაკმაყოფილებულია. ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი ნატურალური a რიცხვი და ვაჩვენოთ, რომ $f^{f(a)+1}(a) = a$. ვთქვათ $a \in S_p$. განსაზღვრის საფუძველზე $f(a) \in S_p$. ამიტომ $f(a) + 1$ იყოფა p -ზე. ცხადია, რომ $f^p(a) = a$ და

$$f^{f(a)+1}(a) = f^{pt}(a) = \underbrace{f^p(a) \circ f^p(a) \circ \dots \circ f^p(a)}_{t\text{-ჯერ}} = a$$

მივიღეთ, რომ ასე განსაზღვრული $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ორივე მოთხოვნილ პირობას, ესე იგი ის არის საინტერესო.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ორზე მეტი მარტივი p რიცხვისთვის f ფუნქცია S_p სიმრავლეზე შეგვიძლია სხვანაირადაც განვმარტოთ. ნებისმიერი $p > 2$ მარტივი რიცხვისთვის ავიღოთ S_p სიმრავლის ნებისმიერი p -ეული $(n_{kp+1}, n_{kp+2}, \dots, n_{(k+1)p})$ და f განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} f(n_{kp+1}) &= n_{kp+3} \\ f(n_{kp+2}) &= n_{kp+4} \\ &\vdots \\ f(n_{kp+p-1}) &= n_{kp+1} \\ f(n_{(k+1)p}) &= n_{kp+2} \end{aligned}$$

ცხადია, რომ ასე განსაზღვრული f ფუნქცია იქნება საინტერესო. გამოვიდა, რომ უსასრულოდ ბევრ სიტუაციაში სულ მცირე ორი ვარიანტი გვაქვს ასარჩევად იმისათვის, რომ საინტერესო f ფუნქცია განისაზღვროს. აქედან გამომდინარე არსებობს უსასრულოდ ბევრი საინტერესო $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ფუნქცია.

ბ) დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $n = p - 1$ სახის ნატურალური რიცხვისთვის, p ნებისმიერი მარტივი რიცხვია, არ არსებობს $\{1, 2, \dots, n\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული საინტერესო $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ფუნქცია. პირველ რიგში შევამოწმოთ, რომ საინტერესო f ფუნქცია არის ინექციური. მართლაც, თუ $f(x) = f(y)$, მაშინ

$$x = f^{f(x)+1}(x) = f^{f(x)}(f(x)) = f^{f(y)}(f(y)) = f^{f(y)+1}(y) = y, \text{ ანუ } x = y.$$

შემოვიღოთ განმარტება: უმცირეს დადებით მთელ k რიცხვს, რომლისთვისაც $f^k(a) = a$, დავარქვათ a რიცხვის *მარტენი*. აღვნიშნოთ ეს რიცხვი შემდეგნაირად: $k = odr(a)$. ასეთი k რიცხვი არსებობს პირობიდან გამომდინარე.

ლემა 1: თუ რაიმე დადებითი მთელი m რიცხვისთვის $f^m(a) = a$, მაშინ $odr(a) \mid m$.

ვთქვათ, $m = odr(a) \cdot t + r$, სადაც $0 \leq r < odr(a)$ და t მთელია. ცხადია, რომ

$$a = f^m(a) = f^{odr(a) \cdot t + r}(a) = f^r(a)$$

ეს ეწინააღმდეგება მაჩვენებლის უმცირესობას.

ლემა2: ნებისმიერი დადებითი მთელი a რიცხვისთვის $ord(a) \mid$ უ. ს. გ. $(a + 1, f(a) + 1)$.

ლემა1-ის თანახმად $ord(a) \mid f(a) + 1$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $ord(a) \mid a + 1$ და ლემა2-იც დამტკიცდება. ვთქვათ, $f^{f(a)}(a) = b$. პირობიდან გამომდინარე გვექნება:

$$f^{f(a)}(a) = b = f^{f(b)+1}(b) = f^{f(f^{f(a)}(a))+1}(f^{f(a)}(a)) = f^{f^{f(a)+1}(a)+1+f(a)}(a) = f^{a+1}(f^{f(a)}(a))$$

რადგან f ინექციურია, ამიტომ $f^{a+1}(a) = a$. ესე იგი $ord(a) \mid a + 1$ და ლემა2-იც დამტკიცდა.

დავუბრუნდეთ დასამტკიცებელს. ავიღოთ ნებისმიერი მარტივი რიცხვი p . ლემა2-დან გამომდინარე $ord(p - 1) = 1$ ან $ord(p - 1) = p$. პირობის თანახმად ვერცერთი მაჩვენებელი ვერ იქნება 1-ის ტოლი. ამიტომ $ord(p - 1) = p$. ლემა1-ის თანახმად $f(p - 1) + 1$ იყოფა p -ზე. ამავედროულად $f(p - 1) \leq p - 1$. ვდებულობთ, რომ $f(p - 1) = p - 1$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. ესე იგი არსებობს უსასრულოდ ბევრი დადებითი მთელი n რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს $\{1, 2, \dots, n\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული საინტერესო ფუნქცია.