ოილერის ოლიმპიადა - 2024. პირველი ტური. (მეორე სესია)

ამოხსნები

ამოცანა 6: *<u>რომეო და ჯულიეტა გემის ბაქანზე</u>* ($\sqrt{2}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: გელაშვილი დემეტრე)

მდინარეზე, რომლის დინების სიჩქარეა $3\,\frac{\text{კმ.}}{\text{სთ.}}$, აგებულია ორი ნავსადგური. საკრუიზო გემი, ყოველ შაბათს 1-ელი ნავსადგურიდან მიდის მე-2-ში, ჩერდება მთელი ღამით და კვირას ბრუნდება 1-ელში. ამ გემზე ცხოვრობენ ლოკოკინები რომეო და ჯულიეტა. შაბათს, გემის გამოსვლისთანავე, ორივე ლოკოკინა გამოვიდა თავისი სახლიდან ერთმანეთის შესახვედრად და აღმოჩნდა, რომ როდესაც ისინი შეხვდნენ, გემიც ამ დროს მივიდა მე-2 ნავსადგურში. ხოლო კვირას, როდესაც გემი გამოვიდა მე-2 ნავსადგურიდან, რომეოც დაიძრა თავისი სახლიდან და ჯულიეტას სახლთან მივიდა იმ დროს რა დროსაც გემი 1-ელ ნავსადგურში შევიდა. დაადგინეთ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში თუ ცნობილია, რომ ჯულიეტა 2-ჯერ უფრო ნელა გადაადგილდება ვიდრე რომეო.

ამოხსნა

პასუხი: $15\,\frac{\text{კმ.}}{\text{სთ.}}$.

დავაკვირდეთ ლოკოკინების მოძრაობას შაბათს. რადგან რომეო ჯულიეტაზე ორჯერ უფრო სწრაფია, ამიტომ შეხვედრისას რომეოს მიერ განვლილი მანძილი ორჯერ მეტი იქნებოდა ვიდრე ჯულიეტას მიერ განვლილი მანძილი. ესე იგი რომეო გაივლიდა მათ სახლებს შორის მანძილის $\frac{2}{3}$ ნაწილს. კვირას კი რომეომ სრულად გაიარა სახლებს შორის მანძილი. ცხადია, სრული გზა 1,5-ჯერ მეტია თავის $\frac{2}{3}$ ნაწილზე და, შესაბამისად, რომეოც 1,5-ჯერ მეტ დრო დახარჯავდა კვირა დღეს ჯულიეტას სახლამდე მისვლაში, ვიდრე შაბათს ჯულიეტასთან შეხვედრის წერტილამდე მისვლისთვის დასჭირდა.

მივიღეთ, რომ გემი მე-2 ნავსადგურიდან 1-ელში დაბრუნებას 1,5-ჯერ მეტ დროს ანდომებს, ვიდრე პირიქით 1-ელი ნავსადგურიდან მე-2-ში მისვლისთვის სჭირდება. ეს ნიშნავს, რომ მდინარე 1-ელი

ნავსადგურიდან მე-2 ნავსადგურისკენ მიედინება. თუ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში არის $x\,\frac{\text{კმ.}}{\text{სთ.}}$, მაშინ შაბათს მისი ხმელეთის მიმართ გადაადგილების სიჩქარე მდინარის დინების მიმართულებით იქნება $(x+3)\,\frac{\text{კმ.}}{\text{სთ.}}$, ხოლო კვირას მისი ხმელეთის მიმართ გადაადგილების სიჩქარე მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით იქნება $(x-3)\,\frac{\text{კმ.}}{\text{სთ.}}$. შესაბამისად, გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$1{,}5(x-3) = x+3;$$

$$1{,}5x - 4{,}5 = x+3;$$

$$0{,}5x = 7{,}5;$$

$$x = 15.$$

მივიღეთ, რომ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში არის $15\,\frac{\text{კმ.}}{\text{სთ.}}$.

ამოცანა 7: *ანას და ბექას რიცხვები* $(2$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: კუცია ბაჩანა)

ნატურალურ რიცხვ N-ს, რომელიც ნაკლებია ას მილიონზე, ანამ გვერდით მიუწერა იგივე N რიცხვი. ბექამ შეკრიბა ყველა ნატურალური რიცხვი 1-იდან N-ის ჩათვლით. აღმოჩნდა, რომ ანას მიერ მიღებული რიცხვი 7-ჯერ აღემატება ბექას მიერ მიღებულ რიცხვს. რას უდრის N ?

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 285.

ვთქვათ N რიცხვის ციფრთა რაოდენობა არის n. პირობის თანახმად $n \le 8$. ცხადია, რომ n-ნიშნა რიცხვის გვერდით იგივე რიცხვის მიწერით მიღებული რიცხვი იგივეა, რაც ამ რიცხვს რომ მარჯვნიდან n რაოდენობის 0 მივუწეროთ და შემდეგ დავუმატოთ ისევ ეს რიცხვი. ანუ ეს რიცხვი უნდა გავამრავლოთ 10^n-ზე და დავუმატოთ ისევ ეს რიცხვი. ესე იგი ანას მიერ მიღებული რიცხვი არის:

$$\overline{NN} = N \cdot 10^n + N$$

ბექას მიერ მიღებული რიცხვი იქნება: $1+2+3+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$. ესე იგი პირობის თანახმად გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$N\cdot 10^n+N=7\cdot\frac{N(N+1)}{2}$$

N-ზე შეკვეცის და 2-ზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ:

$$2\cdot(10^n+1)=7\cdot(N+1)$$

მიღებული ტოლობიდან ირკვევა, რომ n რიცხვი 1-დან 8-ის ჩათვლით ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ 10^n+1 გაიყოს 7-ზე. გავარკვიოთ რა ნაშთებს გვაძლევენ 10-ის ხარისხები 7-ზე გაყოფისას.

$$10^1\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}3$$

$$10^2\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}3\cdot 10=30\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}2$$

$$10^3\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}2\cdot 10=20\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}6$$

$$10^4\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}6\cdot 10=60\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}4$$

$$10^5\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}4\cdot 10=40\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}5$$

$$10^6\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}5\cdot 10=50\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}1$$

რადგან ნაშთი 1 მივიღეთ, ამის შემდეგ ნაშთები დაიწყებენ გამეორებას, ანუ

$$10^7\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}3$$

$$10^8\xrightarrow{7-\text{ზე გაყოფის ნაშთი}}2$$

ვხედავთ, რომ ჩამოთვლილი ნაშთებიდან მხოლოდ ერთი არის 6-ის ტოლი. ანუ ამ 10^n+1 რიცხვებიდან მხოლოდ 10^3+1 იყოფა 7-ზე. ესე იგი რიცხვი N ყოფილა 3-ნიშნა. ანუ გვექნება ტოლობა:

$$2\cdot(10^3+1)=7\cdot(N+1)$$

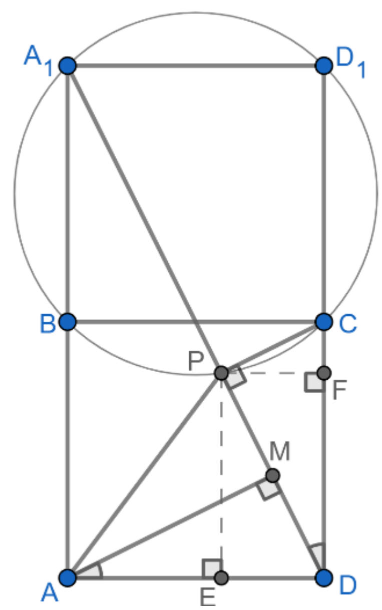
საიდანაც $N=\frac{2\cdot 1001}{7}-1=285$. მართლაც 285 სამნიშნაა.

ამოცანა 8: ***წერტილი კვადრატში*** $(\sqrt{6}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: გვარამია ანდრია)

$ABCD$ კვადრატის შიგნით აღებულია P წერტილი. ცნობილია, რომ $\angle BPC = 135^o$ და ADP სამკუთხედის ფართობი 2-ჯერ აღემატება PCD სამკუთხედის ფართობს: $S_{ADP} = 2 \cdot S_{PCD}$. იპოვეთ $\frac{AP}{PD}$.

ამოხსნა



პასუხი: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

განვიხილოთ P წერტილის E და F გეგმილები, შესაბამისად AD და CD გვერდებზე. ასევე, განვიხილოთ A წერტილის M გეგმილი PD მონაკვეთზე. რადგან $S_{ADP} = 2 \cdot S_{PCD}$, ამიტომ $\frac{PE \cdot AD}{2} = 2 \cdot \frac{PF \cdot CD}{2}$. ესე იგი $PE = 2 \cdot PF$.

განვიხილოთ A_1BCD_1 კვადრატი. ცხადია, რომ $\frac{PE}{ED} = 2 = \frac{A_1A}{AD}$. ესე იგი P წერტილი მდებარეობს A_1D მონაკვეთზე. ასევე, რადგან

$$\angle BA_1C + \angle BPC = 45^o + 135^o = 180^o$$

ამიტომ P წერტილი მდებარეობს A_1BCD_1 კვადრატზე შემოხაზულ წრეწირზე. ესე იგი $\angle CPD = \angle CPA_1 = \angle CBA_1 = 90^o$.

რადგან $\angle MAD = 90^o - \angle MDA = \angle MAC$ და $AD = DC$ ამიტომ სამკუთხედები MAD და PDA ტოლია. ესე იგი $MA = PD$ და $S_{MAD} = S_{PCD} = \frac{S_{APD}}{2}$. აქედან გამომდინარე $DM = MP$ და $AM = 2 \cdot PM$. საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{\sqrt{AM^2 + PM^2}}{PD} = \frac{\sqrt{(2 \cdot PM)^2 + PM^2}}{2 \cdot PM} = \frac{\sqrt{5} \cdot PM}{2 \cdot PM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ამოცანა 9: *ჭიანჭველები კუბიკზე* $(\sqrt{8}$ ქულა)

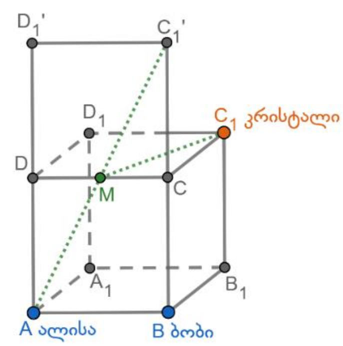
(ამოცანის ავტორი: ტურაშვილი თამარი)

ჭიანჭველები სახელად ალისა და ბობი იმყოფებიან $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის A და B წვეროებში, ხოლო C_1 წვეროში დევს შაქრის კრისტალი (იხილეთ ნახაზი). ცნობილია, რომ ბობს შეუძლია ერთ წუთში 20 მეტრი გაიაროს. მინიმუმ რამდენი მეტრის (მთელი რაოდენობის) გავლა უნდა შეეძლოს ალისას ერთ წუთში, რომ მოახერხოს კრისტალამდე ბობზე ადრე მისვლა?

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: 32 მ.

ვთქვათ, კუბის გვერდის სიგრძე არის x მეტრი. რადგან ბობი და კრისტალი კუბის ერთ წახნაგზე მდებარეობენ, ამიტომ ცხადია, რომ მათ შორის უმოკლესი ტრაექტორია არის BC_1 დიაგონალი. აქედან გამომდინარე ბობს კრისტალამდე აშორებს $\sqrt{2}x$ მეტრი. თუ ბობს წუთში 20 მეტრის გავლა შეუძლია, მაშინ პროპორციის გათვალისწინებით ის კრისტალამდე მისვლას $\frac{\sqrt{2}x}{20}$ წუთში მოახერხებს.



ახლა დავადგინოთ თუ რომელია ალისას საწყისი პოზიციიდან კრისტალამდე მისასვლელი უმოკლესი ტრაექტორია. ცხადია, რომ ალისამ თავისი ტრაექტორიით აუცილებლად უნდა გადაკვეთოს შემდეგი წიბოებიდან ერთერთი: $B_1B;\ BC; CD; DD_1; D_1A_1; A_1B_1$. ჩვენ შეგვიძლია ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ ალისა თავისი ტრაექტორიით გადაკვეთს CD წიბოს. გასარკვევია, თუ რომელ წერტილში უნდა გადაკვეთოს ეს CD წიბო.

$ABCD$ წიბოს შესაბამის სიბრტყეში ავაგოთ $CDD_1'C_1'$ კვადრატი. ცხადია, CD წიბოს ნებისმიერი წერტილიდან C_1' და C_1 წერტილებამდე მანძილი თანაბარია. მინიმალური ტრაექტორიის მისაღებად CD წიბოზე უნდა ავირჩიოთ ისეთი წერტილი, რომლის გავლითაც უმოკლეს მანძილს მივიღებთ A და C_1' წერტილებს შორის. ეს მათი შემაერთებელი მონაკვეთია, რომელიც გაივლის CD წიბოს შუა M წერტილში. ხოლო ამ ტრაექტორიის სიგრძე არის: $AM + MC_1 = AM + MC_1' = AC_1' = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{5}x.$ მივიღეთ, რომ ალისასთვის კრისტალამდე მისასვლელი უმოკლესი ტრაექტორიის სიგრძე არის $\sqrt{5}x$ მეტრი.

დავუშვათ, რომ ალისას ერთ წუთში შეუძლია n რაოდენობის მეტრის გავლა, სადაც n მთელი რიცხვია. პროპორციის გათვალისწინებით გვექნება, რომ ალისას კრისტალამდე მიღწევა შეუძლია $\frac{\sqrt{5}x}{n}$ წუთში. ჩვენ უნდა შევარჩიოთ ისეთი უმცირესი მთელი n რიცხვი, რომ ალისას უფრო ცოტა დრო დასჭირდეს კრისტალამდე მისასვლელად, ვიდრე ბობს. ანუ $\frac{\sqrt{5}x}{n} < \frac{\sqrt{2}x}{20}$. x-ზე შეკვეცის და აკვადრატების შემდეგ ვიღებთ: $\frac{5}{n^2} < \frac{2}{400}$. საიდანაც $n^2 > 1000$. უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვი, რომელიც ამ უკანასკნელ უტოლობას აკმაყოფილებს არის $n = 32$.

ამოცანა 10: *განტოლება* $\left(\sqrt{11}\text{ ქულა}\right)$

(ამოცანის ავტორი: გვარამია ანდრია)

იპოვეთ ყველა ნამდვილი x რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\sqrt{1+\frac{20}{x}}=\sqrt{1+24x}+2$$

ამოხსნა

პასუხი: $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

დავადგინოთ x-ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე: $1+\frac{20}{x}\geq 0$ როცა $x\in(-\infty,-20]\cup(0,\infty)$, ხოლო $1+24x\geq 0$, როცა $x\in\left[-\frac{1}{24},\infty\right)$. ესე იგი დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე არის: $(0,\infty)$. ახლა დავრწმუნდეთ, რომ განტოლებას აქვს ზუსტად ერთი ნამდვილი ამონახსნი. ცხადია, რომ $(0,\infty)$ შუალედზე ტოლობის მარჯვენა მხარე ზრდადია ხოლო მარცხენა მხარე კლებადია. ამავდროულად, როცა $x=\frac{1}{2}$, მაშინ $\sqrt{1+\frac{20}{x}}>\sqrt{1+24x}$, ხოლო, როცა $x=1$, მაშინ $\sqrt{1+\frac{20}{x}}<\sqrt{1+24x}$. ესე იგი აღნიშნულ განტოლებას აქვს ზუსტად ერთი ნამდვილი ამონახსნი $\left(\frac{1}{2},1\right)$ შუალედში.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\sqrt{1+\frac{20}{x}}\equiv a$ და $\sqrt{1+24x}\equiv b$. პირობის თანახმად $a=b+2$. ცხადია, რომ $a>0$ და $b>0$. ასევე, გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$(a^2-1)(b^2-1)=\left(1+\frac{20}{x}-1\right)(1+24x-1)=\frac{20}{x}\cdot 24x=480$$

აქედან გამომდინარე სამართლიანია შემდეგი:

$$(ab-1)^2=(a-b)^2+480=484$$

ესე იგი $ab-1=22$ ან $ab-1=-22$. რადგან $a>0$ და $b>0$, ამიტომ $ab=23$. რადგან $a=b+2$ გვაქვს: $(b+2)b=23$. ამოვხსნათ ეს კვადრატული განტოლება: $b^2+2b=23$. ანუ $(b+1)^2=24$. საიდანაც b არის ან $\sqrt{24}-1$ ან $-\sqrt{24}-1$. რადგან $b>0$ ამიტომ $b=\sqrt{24}-1$. მივიღეთ, რომ $\sqrt{1+24x}=\sqrt{24}-1$. ანუ $1+24x=25-2\sqrt{24}$ და საბოლოოდ $x=\frac{24-4\sqrt{6}}{24}=1-\frac{\sqrt{6}}{6}$. ამ ამონახსნის შემოწმება საჭირო აღარ არის, რადგან თუ რამე შეიძლებოდა ფესვი ყოფილიყო, მხოლოდ ეს რიცხვია. ჩვენ კი უკვე ვიცით, რომ ერთი ამონახსნი განტოლებას ნამდვილად აქვს.