# ოილერის ოლიმპიადა - 2024. პირველი ტური. (პირველი სესია)

# ამოხსნები

**ამოცანა 1:** *<u>მინიმალური განსხვავება</u>* (1 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

ათივე ციფრის ზუსტად ერთჯერ გამოყენებით შეადგინეთ ორი ხუთნიშნა რიცხვი ისე, რომ მათ შორის განსხვავება იყოს მინიმალური. რას უდრის ეს განსხვავება?

*ა მ ო ხ ს ნ ა*

*პ ა ს უ ხ ი:* 247.

იმისათვის რომ განსხვავება იყოს მინიმალური, საჭიროა რომ საკლების პირველ ციფრი 1-ით მეტი იყოს მაკლების პირველ ციფრზე. ასეთ ციფრთა წყვილი რამდენიმეა, მაგრამ წარმოვიდგინოთ, რომ ერთერთი მათგანი შევარჩიეთ საკლებისა და მაკლების საწყისი ციფრების როლში. ახლა კი მინიმალური განსხვავებისთვის საჭიროა, რომ დანარჩენი 8 ციფრის გამოყენებით საკლები მივიღოთ რაც შეიძლება მცირე, ხოლო მაკლები - რაც შეიძლება დიდი. ამისათვის ოპტიმალურია, რომ საკლების მე-2, მე-3, მე-4 და მე-5 ციფრები იყვნენ, შესაბამისად, $0, 1, 2$ და 3, ხოლო მაკლების მე-2, მე-3, მე-4 და მე-5 ციფრები იყვნენ, შესაბამისად, $9, 8, 7$ და 6. მართლაც, გამოსაყენებელი დარჩა ორი მომდევნო ციფრი: 4 და 5. ესე იგი მინიმალურ განსხვავებას გვაძლევს შემდეგი რიცხვები: $50123 - 49876 = 247$.

**ამოცანა 2:** *რებუსი* $(\sqrt{3}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

მოცემულია რებუსი: $AB \cdot AC \cdot BC = BBBCCC$ სადაც განსხვავებული ასოები განსხვავებულ ციფრებს, ხოლო ერთნაირი ასოები ერთნაირ ციფრებს აღნიშნავენ. რას უდრის $AB + AC + BC$ ?

*ა მ ო ხ ს ნ ა*

*პ ა ს უ ხ ი:* 227.

შევნიშნოთ, რომ

$$BBBCCC = BBB000 + CCC = 111 \cdot B000 + 111 \cdot C = 111 \cdot (B000 + C) = 37 \cdot 3 \cdot B00C$$

ეს ნიშნავს, რომ ნამრავლი $AB \cdot AC \cdot BC$ იყოფა 37-ზეც და 3-ზეც. ამიტომ $AB$, $AC$ და $BC$ რიცხვებიდან ერთერთი უნდა იყოს 37-ის ჯერადი, ანუ 37 ან 74. ასევე, ერთერთი უნდა იყოს 3-ის ჯერადი. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

თუ $AB = 74$, მაშინ $74 \cdot 7C \cdot 4C = 444CCC$. ეს ტოლობა ვერ შესრულდება, რადგან მარცხენა მხარე აუცილებლად ნაკლებია მარჯვენაზე: $74 \cdot 7C \cdot 4C < 80 \cdot 80 \cdot 50 = 320000 < 444000 \leq 444CCC$.

თუ $AC = 74$, მაშინ $7B \cdot 74 \cdot B4 = BBB444$. ბოლო ციფრებზე დაკვირვებით ვხვდებით, რომ $B$ ციფრი უნდა იყოს 4 ან 9. $B = 4$ არ შეიძლება რადგან $C = 4$. ხოლო როცა $B = 9$, მაშინ $AB$, $AC$ და $BC$ რიცხვებიდან არცერთი არ გამოდის 3-ის ჯერადი და ეს არ მოგვცემს სასურველ შედეგს.

თუ $BC = 74$, მაშინ $A7 \cdot A4 \cdot 74 = 777444$. ბოლო ციფრებზე დაკვირვებით ეს ტოლობა ვერ შესრულება.

თუ $AB = 37$, მაშინ $37 \cdot 3C \cdot 7C = 777CCC$. ეს ტოლობაც ვერ შესრულდება, რადგან მარცხენა მხარე აუცილებლად ნაკლებია მარჯვენაზე: $37 \cdot 3C \cdot 7C < 40 \cdot 40 \cdot 80 = 128000 < 777000 \leq 777CCC$.

თუ $AC = 37$, მაშინ $3B \cdot 37 \cdot B7 = BBB777$. ბოლო ციფრებზე დაკვირვებით ვხვდებით, რომ $B$ ციფრი უნდა იყოს 3, მაგრამ ეს არ შეიძლება, რადგან $A = 3$.

თუ $BC = 37$, მაშინ $A3 \cdot A7 \cdot 37 = 333777$. აქ კი ვცდით მაქსიმალურ $A = 9$ ვარიანტს და გამოდის სწორი ტოლობა: $93 \cdot 97 \cdot 37 = 333777$. ცხადია, რომ უფრო ნაკლები $A$-სთვის ტოლობა აღარ შესრულდებოდა.

მივიღეთ, რომ $AB = 93$; $AC = 97$ და $BC = 37$. ესე იგი $AB + AC + BC = 93 + 97 + 37 = 227$.

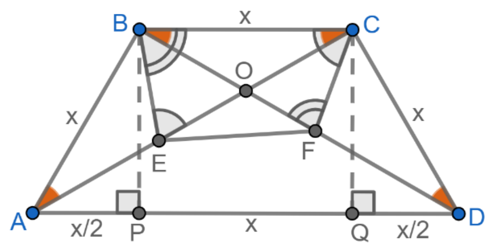
**ამოცანა 3:** *ფართობების შეფარდება ტრაპეციაში* ($\sqrt{5}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: მელიქიძე ზაზა)

$ABCD$ ტრაპეციაში $AD$ ფუძე ორჯერ მეტია დანარჩენ სამივე გვერდზე. $AC$ და $BD$ დიაგონალებზე შერჩეულია, შესაბამისად, $E$ და $F$ წერტილები ისე, რომ $\angle BEC = 70^o$ და $\angle BFC = 80^o$. გამოთვალეთ $BEFC$ და $ABCD$ ოთხკუთხედების ფართობების შეფარდება: $\frac{S_{BEFC}}{S_{ABCD}} =?$

*ამოხსნა*

*პასუხი:* $\frac{1}{3}$.




$AD$ ფუძის სიგრძე აღვნიშნოთ $2x$-ით. პირობის თანახმად გვექნება: $AB = BC = CD = x$. ვთქვათ, დიაგონალები იკვეთებიან $O$ წერტილში, ხოლო $B$ და $C$ წერტილების გეგმილები $AD$ ფუძეზე არიან, შესაბამისად, $P$ და $Q$. ცხადია, რომ $ABCD$ ტრაპეცია არის ტოლფერდა. ამიტომ $ABP$ და $DCQ$ სამკუთხედები ტოლია. ესე იგი $AP = DQ$. ასევე, ცხადია, რომ $PBCQ$ ოთხკუთხედი არის მართკუთხედი. ანუ $PQ = x$. აქედან გამომდინარე გვექნება $AP = QD = \frac{AD-PQ}{2} = \frac{2x-x}{2} = \frac{x}{2}$. გამოვიდა, რომ $\angle BAP = \angle CDQ = 60^o$. ცხადია, რომ $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD$. ესე იგი $\angle BAC = \angle CAD = 30^o$. გარდა ამისა, მივიღეთ, $\angle BCA = \angle CBD = \angle CDB = BDA = 30^o$ და ამიტომ $\angle AOB = 60^o$. ამ ყველაფრიდან გამომდინარე უკვე შეგვიძლია ვიპოვოთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.

$$S_{ABCD} = BP \cdot \frac{(BC + AD)}{2} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x + 2x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$$

დავაკვირდეთ $BCE$ და $FBC$ სამკუთხედებს. $\angle BCF = 180^o - 30^o - 80^o = 70^o$. ასევე, გვაქვს შემდეგი: $\angle CBE = 180^o - 30^o - 70^o = 80^o$. გამოვიდა, რომ $BCE$ და $FBC$ სამკუთხედები მსგავსია. ესე იგი: $\frac{BC}{FB} = \frac{CE}{BC}$, ანუ $FB \cdot CE = BC^2 = x^2$. ამიტომ

$$S_{BEFC} = \frac{1}{2} \cdot FB \cdot CE \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

ესე იგი

$$\frac{S_{BEFC}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Big/ \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{1}{3}.$$

**ამოცანა 4:** *<u>ოთხეულთა რაოდენობა</u>* $(\sqrt{7}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: ხუციშვილი ირაკლი)

იპოვეთ ისეთი $(a, b, c, d)$ დადებითი მთელი რიცხვების დალაგებულ ოთხეულთა რაოდენობა, რომელთათვისაც სამართლიანია ტოლობა:

$$a + 2b + 3c + 1000d = 2024$$

*ა მ ო ხ ს ნ ა*

*პ ა ს უ ხ ი:* 86907.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი მთელი $n$ რიცხვისთვის ისეთი $(a, b)$ დადებითი მთელი რიცხვების წყვილთა რაოდენობა, რომელთათვისაც სამართლიანია ტოლობა: $a + 2b = n$ არის $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, სადაც ჩანაწერი $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება $\frac{n-1}{2}$ - ს. მართლაც ყოველი დაფიქსირებული $b$ რიცხვისთვის, რომელიც შეიძლება იყოს 1-იდან $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$-ის ჩათვლით ნებისმიერი მთელი რიცხვი, ფიქსირდება დადებითი მთელი $a$ რიცხვიც. ამიტომ ასეთი $(a, b)$ წყვილების რაოდენობა არის $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

$x_n$-ით აღვნიშნოთ ისეთი $(a, b, c)$ დადებითი მთელი რიცხვების დალაგებულ სამეულთა რაოდენობა, რომელთათვისაც სამართლიანია ტოლობა: $a + 2b + 3c = n$. ცხადია, რომ ამ ამოცანის პასუხი იქნება $x_{1024} + x_{24}$ , რადგან $x_{1024}$ იქნება იმ ოთხეულთა რაოდენობა, რომელშიც $d = 1$, ხოლო $x_{24}$ იქნება იმ ოთხეულთა რაოდენობა, რომელშიც $d = 2$. ცხადია $d$ რიცხვი ვერ აცდება 2-ს. ესე იგი ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $x_{1024}$ და $x_{24}$, ხოლო ამოცანის პასუხი იქნება მათი ჯამი.

გამოვთვალოთ $x_{24}$. თუ $a + 2b + 3c = 24$ მაშინ $c$ რიცხვი შეიძლება იყოს 1-იდან 7-ის ჩათვლით ნებისმიერი მთელი რიცხვი. თითოეული მათგანისთვის შესაბამის $(a, b)$ წყვილთა რაოდენობა უკვე ვიცით თუ როგორ ითვლება. ანუ

$$x_{24} = \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{14}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 10 + 8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 37$$

ანალოგიურად გამოვთვალოთ $x_{1024}$-იც:

$$x_{1024} = \left\lfloor \frac{1020}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1017}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1014}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1011}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 510 + 508 + 507 + 505 + \cdots + 3 + 1$$

მივიღეთ ორი არითმეტიკული პროგრესიის ჯამი:

$$510 + 507 + \cdots + 3 = \frac{510 + 3}{2} \cdot 170 = 513 \cdot 85$$

ხოლო მეორე არითმეტიკული პროგრესიის ჯამი იქნება:

$$508 + 505 + \cdots + 1 = \frac{508 + 1}{2} \cdot 170 = 509 \cdot 85$$

მივიღეთ, რომ $x_{1024} = 513 \cdot 85 + 509 \cdot 85 = 1022 \cdot 85 = 86870$. საბოლოო პასუხი კი იქნება:

$$x_{1024} + x_{24} = 86870 + 37 = 86907.$$

**ამოცანა 5:** *<u>შეფარდებათა ჯამი</u>* $(\sqrt{10}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: ხიმშიაშვილი გოგი)

$ABCDEF$ ამოზნექილი ექვსკუთხედის $AE$ და $BF$ დიაგონალები იკვეთებიან $X$ წერტილში, ხოლო $BD$ და $CE$ დიაგონალები იკვეთებიან $Y$ წერტილში. ცნობილია, რომ

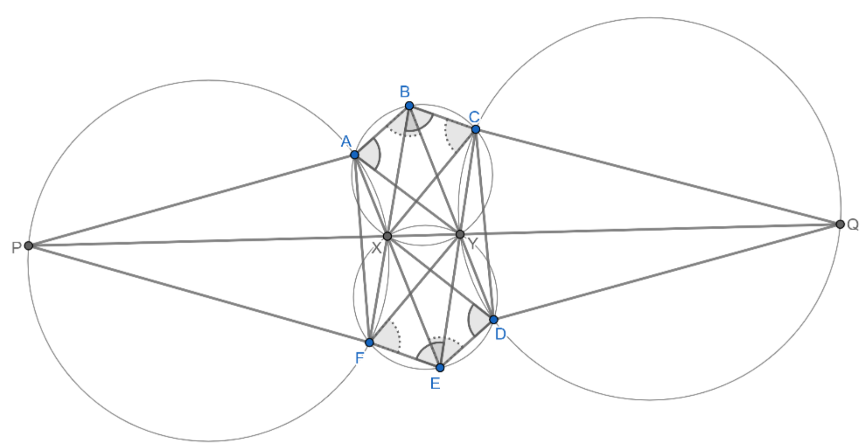
$$\angle XBC = \angle XDE = \angle YAB = \angle YEF = 80^{\circ} \quad \text{და} \quad \angle XCB = \angle XED = \angle YBA = \angle YFE = 70^{\circ}$$

$XY$ წრფეზე აღებულია ისეთი $P$ და $Q$ წერტილები, რომ როგორც $PX$ და $AF$ მონაკვეთები, ასევე $QY$ და $CD$ მონაკვეთები იკვეთებიან და $\angle APF = \angle CQD = 30^{\circ}$. იპოვეთ ჯამი:

$$\frac{BX}{BF} + \frac{BY}{BD} + \frac{EX}{EA} + \frac{EY}{EC} + \frac{PX}{PY} + \frac{QY}{QX}$$

*ა მ ო ხ ს ნ ა*

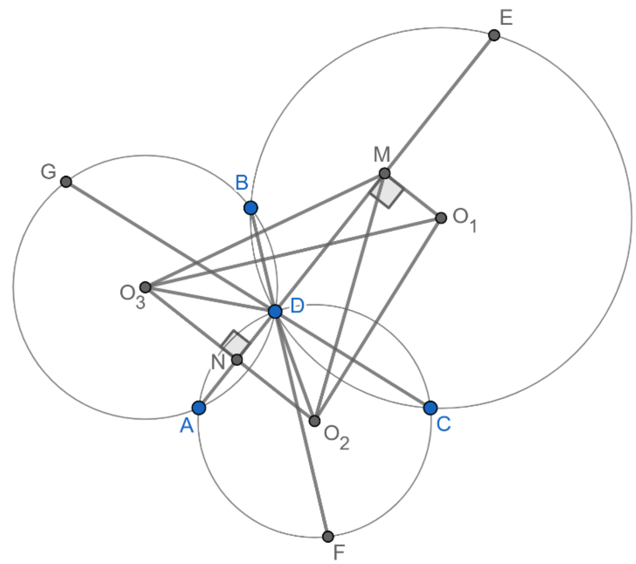
*პ ა ს უ ხ ი:* 4.




რადგან $\angle XBC = \angle XDE$ და $\angle XCB = \angle XED$ ამიტომ $\angle CXB = \angle EXD$ და სამკუთხედები $XBC$ და $XDE$ მსგავსია. ცხადია, რომ $\angle DXB = \angle EXC$ და $\frac{BX}{CX} = \frac{XD}{XE}$. ესე იგი სამკუთხედები $DXB$ და $EXC$ მსგავსია. მივიღეთ, რომ $\angle YDX = \angle YEX$ და $\angle XBY = \angle XCY$. ეს კი ნიშნავს, რომ $BCYX$ და $EDYX$ ოთხკუთხედებზე შემოიხაზება წრეწირი. ზუსტად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $ABYX$ და $FEYX$ ოთხკუთხედებზეც შემოიხაზება წრეწირი. ამ ორი შედეგის გაერთიანებით მივიღეთ, რომ $ABCYX$ და $FEDYX$ ხუთკუთხედებზე შემოიხაზება წრეწირი. გარდა ამისა $\angle BYC = \angle BXC = 180^{\circ} - 70^{\circ} - 80^{\circ} = 30^{\circ} = \angle CQD$. ესე იგი $CQDY$ ოთხკუთხედზეც შემოიხაზება წრეწირი. ანალოგიური მსჯელობით $AXFP$ ოთხკუთხედზეც შემოიხაზება წრეწირი. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

*ლემა:* ვთქვათ $\omega_1$ და $\omega_2$ წრეწირები იკვეთებიან $C$ და $D$ წერტილებში, $\omega_2$ და $\omega_3$ წრეწირები იკვეთებიან $A$ და $D$ წერტილებში და $\omega_1$ და $\omega_3$ წრეწირები იკვეთებიან $B$ და $D$ წერტილებში. $AD$, $BD$ და $CD$ სხივები, შესაბამისად $\omega_1$, $\omega_2$ და $\omega_3$ წრეწირებს კვეთენ $E$, $F$ და $G$ წერტილებში. სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{AD}{AE}+\frac{BD}{BF}+\frac{CD}{CG}=1$$




განვიხილოთ $\omega_1$, $\omega_2$ და $\omega_3$ წრეწირების, შესაბამისად $O_1$, $O_2$ და $O_3$ ცენტრები. ავიღოთ $AD$ და $DE$ მონაკვეთების, შესაბამისად $N$ და $M$ შუა წერტილები. ცხადია, რომ $N$ წერტილი მდებარეობს $O_2O_3$ წრფეზე, $O_2O_3 \perp AD$ და $O_1M \perp DE$. ესე იგი $O_2O_3 \parallel O_1M$ და, ამიტომ $S_{MO_2O_3} = S_{O_1O_2O_3}$. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DN}{NM}=\frac{DN\cdot O_2O_3}{2}\Big/\frac{NM\cdot O_2O_3}{2}=\frac{S_{DO_2O_3}}{S_{MO_2O_3}}=\frac{S_{DO_2O_3}}{S_{O_1O_2O_3}}$$

ანალოგიურად $\frac{BD}{BF}=\frac{S_{DO_1O_3}}{S_{O_1O_2O_3}}$ და $\frac{CD}{CG}=\frac{S_{DO_1O_2}}{S_{O_1O_2O_3}}$. ანუ გვექნება:

$$\frac{AE}{AD}+\frac{BF}{BD}+\frac{CG}{CD}=\frac{S_{DO_2O_3}}{S_{O_1O_2O_3}}+\frac{S_{DO_1O_3}}{S_{O_1O_2O_3}}+\frac{S_{DO_1O_2}}{S_{O_1O_2O_3}}=\frac{S_{O_1O_2O_3}}{S_{O_1O_2O_3}}=1$$

და ლემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ ამოცანას. ლემის თანახმად გვექნება:

$$\frac{BX}{BF}+\frac{EX}{EA}+\frac{PX}{PY}=1-\frac{FX}{BF}+1-\frac{AX}{EA}+1-\frac{YX}{PY}=3-1=2$$

ანალოგიურად გვექნება $\frac{BY}{BD}+\frac{EY}{EC}+\frac{QY}{QX}=2$. ესე იგი $\frac{BX}{BF}+\frac{BY}{BD}+\frac{EX}{EA}+\frac{EY}{EC}+\frac{PX}{PY}+\frac{QY}{QX}=2+2=4$.