# ოილერის ოლიმპიადა - 2023. პირველი ტური. (მეორე სესია)

# ამოხსნები

**ამოცანა 6:** *<u>რებუსი</u>* $(\sqrt{2}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

მოცემულია რებუსი:

$$AB + BC + CA = XY + YZ + ZX = KL + LM + MK$$

სადაც განსხვავებული ასოები განსხვავებულ ციფრებს, ხოლო ერთნაირი ასოები ერთნაირ ციფრებს აღნიშნავენ. რას უდრის $AXK + BYL + CZM$ ?

*ა მ ო ხ ს ნ ა*

*პ ა ს უ ხ ი:* 1665.

ცხადია, რომ $AB = 10 \cdot A + B$. ანუ $AB + BC + CA = 10A + B + 10B + C + 10C + A = 11(A + B + C)$. ანალოგიურად $XY + YZ + ZX = 11(X + Y + Z)$ და $KL + LM + MK = 11(K + L + M)$. პირობის თანახმად გამოგვივიდა, რომ $A + B + C = X + Y + Z = K + L + M$. ვინაიდან ამ უკანასკნელ ტოლობაში მონაწილეობს ცხრა განსხვავებული ასო, ამიტომ მასში უნდა გვხვდებოდეს ყველა ციფრი ნულის გარდა (რადგან ორნიშნა ნატურალური რიცხვი ნულით ვერ დაიწყება). ქედან გამომდინარე

$$A + B + C = X + Y + Z = K + L + M = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

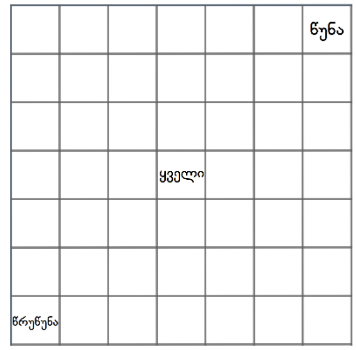
ახლა კი ვიპოვით ის ჯამი რასაც გვეკითხებიან:

$$AXK + BYL + CZM = 100A + 10X + K + 100B + 10Y + L + 100C + 10Z + M =$$

$$= 100(A + B + C) + 10(X + Y + Z) + K + L + M = 100 \cdot 15 + 10 \cdot 15 + 15 = 1665$$

**ამოცანა 7:** *წუნა და წრუწუნა კვადრატულ ცხრილში* (2 ქულა)

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)




$7 \times 7$ ზომის კვადრატული ცხრილის მარცხენა ქვედა უჯრაში ზის წრუწუნა, მარჯვენა ზედა უჯრაში ზის წუნა, ხოლო ცხრილის ცენტრალურ უჯრაში დევს ყველის ნაჭერი. წრუწუნას სურს მივიდეს წუნასთან და ყველის ნაჭერიც მიუტანოს. ცნობილია, რომ წრუწუნა ყოველი უჯრიდან გადაადგილდება მხოლოდ მარჯვენა ან ზედა მეზობელ უჯრაში. დაადგინეთ, რამდენი განსხვავებული გზით შეუძლია წრუწუნას მარცხენა ქვედა უჯრიდან მარჯვენა ზედა უჯრაში მისვლა ისე, რომ ცენტრალურ უჯრაზეც გაიაროს.

*ამოხსნა*

*პასუხი:* 400.

პირველ რიგში დავადგინოთ რამდენი განსხვავებული გზით შეუძლია წრუწუნას ყველის უჯრამდე მისვლა. განვიხილოთ $4 \times 4$ ზომის კვადრატული ცხრილი და თითოეულ უჯრაში ჩავწეროთ ის რიცხვი, რამდენნაირადაც შეუძლია წრუწუნას ამ უჯრაში მოხვედრა მარცხენა ქვედა უჯრიდან. ცხრილის შევსება მოვახდინოთ შემდეგი ლოგიკის საფუძველზე: ცხრილის რაიმე უჯრაში მოხვედრა შესაძლებელია ან მისი ქვედა მეზობლიდან, ან მისი მარცხენა მეზობლიდან. ამიტომ თითოეულ უჯრაში ჩაწერილი რიცხვი ტოლი უნდა იყოს მის ქვედა მეზობელ და მარცხენა მეზობელ უჯრებში ჩაწერილი რიცხვების ჯამისა. ამგვარად ცხრილი შეივსება შემდეგნაირად:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 10 | 20 |
| 1 | 3 | 6 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

ანუ გამოვიდა, რომ წრუწუნას ყველის უჯრამდე მისვლა შეუძლია 20 განსხვავებული გზით. ცხადია, რომ ყველის უჯრიდან წუნამდე მისვლაც, ასევე, 20 განსხვავებული გზით შეუძლია. ესე იგი წუნამდე მისვლა ყველის უჯრის გავლით შეუძლია $20 \cdot 20 = 400$ განსხვავებული გზით.

**ამოცანა 8:** *$(n, m)$ წყვილთა რაოდენობა* $(\sqrt{6}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: Stijn Cambie)

ვთქვათ, $a, b, c$ და $d$ ისეთი დადებითი მთელი რიცხვებია, რომ სრულდება შემდეგი ორი უტოლობა: $a < 10^{20} \cdot c$ და $b > 10^{23} \cdot d$. დაადგინეთ, მინიმუმ რამდენი შეიძლება იყოს ყველა ისეთ დადებით მთელ რიცხვთა $(n, m)$ წყვილის რაოდენობა, რომელთათვისაც $n \cdot m = 2^{2023}$ და

$$\frac{ab}{n} + \frac{cd}{m} < \frac{(a+c)(b+d)}{n+m}$$

*ა მ ო ხ ს ნ ა*

*პ ა ს უ ხ ი:* 5.

მოცემული უტოლობა გარდავქმნათ. გავამრავლოთ ორივე მხარე $nm(n+m)$-ზე. მივიღებთ:

$$abm(n+m) + cdn(n+m) < (a+c)(b+d)nm$$

გავხსნათ ფრჩხილები, ერთნაირი წევრები გავაბათილოთ და ყველაფერი დავალაგოთ მარცხენა მხარს:

$$abmn + abm^2 + cdn^2 + cdnm < abnm + adnm + cbnm + cdnm$$

$$abm^2 - adnm + cdn^2 - cbnm < 0$$

$$am(bm - dn) - cn(bm - dn) < 0$$

$$(am - cn)(bm - dn) < 0$$

გამოვიდა, რომ უტოლობა სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $am - cn > 0$ და $bm - dn < 0$, ან როცა $am - cn < 0$ და $bm - dn > 0$. ეს ორი რამ კი ტოლფასია შემდეგის:

$$\frac{b}{d} < \frac{n}{m} < \frac{a}{c} \qquad \text{ან} \qquad \frac{a}{c} < \frac{n}{m} < \frac{b}{d}$$

ამ ორ ორმაგ უტოლობას შორის მარცხენას შესრულება შეუძლებელია, რადგან პირობის თანახმად $10^{23} < \frac{b}{d} < \frac{n}{m} < \frac{a}{c} < 10^{20}$ და ვიღებთ აბსურდს, რომ $10^{23} < 10^{20}$. ესე იგი სამართლიანია მარჯვენა ორმაგი უტოლობა: $\frac{a}{c} < \frac{n}{m} < \frac{b}{d}$. ესე იგი ისეთი $(n, m)$ წყვილები, რომლისთვისაც $n \cdot m = 2^{2023}$ და $10^{20} < \frac{n}{m} < 10^{23}$, ავტომატურად დააკმაყოფილებენ ამოცანის პირობას. ცხადია, რომ $[10^{20}, 10^{23}]$ შუალედის გარეთ მდებარე $\frac{n}{m}$ შეფარდება გარანტირებულად არ ჩავარდება $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right]$ შუალედში, რადგან შესაძლებელი იქნება ისეთი $a, b, c$ და $d$ დადებითი მთელი რიცხვების შერჩევა, რომ $\left(10^{20} - \frac{a}{c}\right)$ იყოს ნებისმიერად მცირე

დადებითი რიცხვი და $\left(\frac{b}{d}-10^{23}\right)$, ასევე, იყოს ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვი. ამიტომ, ამოცანის პასუხი იქნება ისეთ $(n,m)$ წყვილთა რაოდენობა, რომლისთვისაც $n \cdot m = 2^{2023}$ და $10^{20} \leq \frac{n}{m} \leq 10^{23}$.

ვთქვათ $n \cdot m = 2^{2023}$ და $10^{20} \leq \frac{n}{m} \leq 10^{23}$, მაშინ $n = 2^x$ და $m = 2^y$, სადაც $x$ და $y$ ისეთი არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, რომ $x + y = 2023$ და $10^{20} \leq 2^{x-y} \leq 10^{23}$. ცხადია, რომ $(x+y)$-ისა და $(x-y)$-ის ლუწ-კენტობა ემთხვევა. მაშასადამე, $(x-y)$ არის კენტი. გამოვიდა, რომ ამოცანის პასუხი არის ის რიცხვი, ორის რამდენი კენტი ხარისხიც თავსდება $[10^{20}, 10^{23}]$ შუალედში. დავადგინოთ ეს რაოდენობა:

$$10^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20} = 2^{20} \cdot 125^6 \cdot 25 < 2^{20} \cdot 128^6 \cdot 32 = 2^{20} \cdot 2^{42} \cdot 2^5 = 2^{67}$$

$$10^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20} = 2^{20} \cdot 625^5 > 2^{20} \cdot 512^5 = 2^{20} \cdot 2^{45} = 2^{65}$$

გამოვიდა, რომ $2^{65} < 10^{20} < 2^{67}$. ასევე, გვაქვს:

$$10^{23} = 2^{23} \cdot 5^{23} = 2^{23} \cdot 125^7 \cdot 25 < 2^{23} \cdot 128^7 \cdot 32 = 2^{23} \cdot 2^{49} \cdot 2^5 = 2^{77}$$

$$10^{23} = 2^{23} \cdot 5^{23} = 2^{23} \cdot 3125^4 \cdot 125 > 2^{23} \cdot 3072^4 \cdot 64 = 2^{23} \cdot 3^4 \cdot 1024^4 \cdot 2^6 > 2^{23} \cdot 2^6 \cdot 2^{40} \cdot 2^6 = 2^{75}$$

მივიღეთ, რომ $2^{75} < 10^{23} < 2^{77}$. საბოლოოდ გვაქვს:

$$2^{65} < 10^{20} < 2^{67} < 2^{69} < 2^{71} < 2^{73} < 2^{75} < 10^{23} < 2^{77}$$

ესე იგი $[10^{20}, 10^{23}]$ შუალედში ორის კენტი ხარისხების რაოდენობა არის 5. ანუ ამოცანის პასუხიც არის 5.

**ამოცანა 9:** *ძალიან საინტერესო რიცხვი* ($\sqrt{8}$ ქულა)

(ამოცანის ავტორი: აღდგომელაშვილი ზურაბი)

დადებით მთელ $x$ რიცხვს დავარქვათ *საინტერესო,* თუ არსებობს დადებითი მთელი $y$ რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $(x+y)^y=(x-y)^x$. ვთქვათ, ზრდადობით ჩამოწერეს ყველა საინტერესო რიცხვი. საინტერესო რიცხვს დავარქვათ *ძალიან საინტერესო,* თუ იგი მისი ორივე საინტერესო მეზობლიდან არცერთთან არ არის ურთიერთმარტივი. იპოვეთ სიდიდით მეორე ძალიან საინტერესო რიცხვი. (იგულისხმება, რომ სიდიდით პირველი საინტერესო რიცხვი არ არის ძალიან საინტერესო)

*ამოხსნა*

*პასუხი:* $17\cdot 2^{29}$.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ თუ $(x+y)^y=(x-y)^x$, მაშინ $x>y$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიღებთ, რომ $|x+y|>|x-y|$ და ტოლობის მარცხენა მხარეში უფრო მეტი მოდულის მქონე რიცხვი ადის უფრო მეტ ხარისხში, რაც ტოლობას გამორიცხავს.

ვთქვათ $(x+y)^y=(x-y)^x$ და $\text{უ.ს.გ.}(x,y)=d$. ანუ $x=dx_1$ და $y=dy_1$, სადაც $\text{უ.ს.გ.}(x_1,y_1)=1$. ჩავსვათ ტოლობაში: $(dx_1+dy_1)^{dy_1}=(dx_1-dy_1)^{dx_1}$. ხარისხის $d$-ზე შეკვეცით და ტოლობის $d^{y_1}$-ზე შეკვეცით მივიღებთ:

$$(x_1+y_1)^{y_1}=d^{x_1-y_1}\cdot(x_1-y_1)^{x_1} \qquad (*)$$

ევკლიდეს ალგორითმის საფუძველზე (https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm) გვექნება: $\text{უ.ს.გ.}(x_1+y_1,x_1-y_1)=\text{უ.ს.გ.}(2x_1,x_1-y_1)=\text{უ.ს.გ.}(2,x_1-y_1)$. ასევე, $(*)$ ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ $x_1-y_1$ იყოფა რაიმე $p$ მარტივ რიცხვზე, მაშინ $x_1+y_1$, ასევე, იყოფა $p$ მარტივ რიცხვზე. ანუ გამოდის, რომ $x_1-y_1$ ან ერთის ტოლია, ან ორის რაიმე დადებითი ხარისხის. ანუ გვაქვს ორი შემთხვევა:

პირველი შემთხვევა: $x_1-y_1=1$ და მეორე შემთხვევა: $x_1-y_1=2^a$

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა: $x_1-y_1=1$. შევიტანოთ $(*)$ ტოლობაში $y_1=x_1-1$. მივიღებთ: $(2x_1-1)^{x_1-1}=d$. გამოვიდა, რომ ყოველი $x_1\geq 2$ მთელი რიცხვისთვის $x=x_1(2x_1-1)^{x_1-1}$ არის საინტერესო რიცხვი. ეს რიცხვებია: $2\cdot 3; 3\cdot 5^2; 4\cdot 7^3; \ldots$ და ა. შ... რიცხვთა ამ მიმდევრობას დავარქვათ *„პირველი ტიპის"* საინტერესო რიცხვები.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა: $x_1-y_1=2^a$. თუ $a\geq 2$, მაშინ ცხადია, რომ $x_1+y_1$ იყოფა 2-ზე, მაგრამ არ იყოფა 4-ზე. ანუ $(*)$ ტოლობის მარცხენა მხარეში 2-ის ხარისხი არის ზუსტად $y_1$, ხოლო მარჯვენა მხარეში მინიმუმ $ax_1$, რაც შეუძლებელია, რადგან $y_1<ax_1$. ანუ მივიღეთ, რომ $x_1-y_1=2$. შევიტანოთ $(*)$ ტოლობაში $y_1=x_1-2$. მივიღებთ: $(2x_1-2)^{x_1-2}=d^2\cdot 2^{x_1}$. შევკვეცოთ $2^{x_1-2}$-ზე და მივიღებთ: $(x_1-1)^{x_1-2}=(2d)^2$. რადგან $x_1-2$ კენტი რიცხვია, ამიტომ $x_1-1$ უნდა იყოს რაიმე ლუწი რიცხვის კვადრატი. ანუ არსებობს ნატურალური $n$, რომლისთვისაც $x_1-1=(2n)^2$. საბოლოოდ გვექნება, რომ $((2n)^2)^{(2n)^2-1}=(2d)^2$. საიდანაც ვიღებთ $d=\frac{(2n)^{4n^2-1}}{2}$. ესე იგი, ყოველი $n\geq 1$ მთელი რიცხვისთვის

$x = (4n^2+1)\cdot\frac{(2n)^{4n^2-1}}{2}$ არის საინტერესო რიცხვი. ეს რიცხვებია: $5\cdot 2^2; 17\cdot 2^{29};\ 37\cdot 2^{34}\cdot 3^{35};\ \ldots$ და. ა. შ... რიცხვთა ამ მიმდევრობას დავარქვათ *„მეორე ტიპის“* საინტერესო რიცხვები.

მიღებული გვაქვს შემდეგი სურათი: სულ გვაქვს ორი ტიპის საინტერესო რიცხვები. ჩვენ უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ ეს რიცხვები დავალაგეთ ზრდის მიხედვით და მათ შორის უნდა ვიპოვოთ სიდიდით მეორე, რომელიც მის არცერთ მეზობელთან არ არის თანამარტივი. ცხადია, რომ პირველი ძალიან საინტერესო რიცხვი არის მეორე ტიპის საინტერესო რიცხვი $5\cdot 2^2 = 20$. მისი მეზობლები არიან პირველი ტიპის საინტერესო რიცხვები $2\cdot 3 = 6$ და $3\cdot 5^2 = 75$. ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი ძალიან საინტერესო რიცხვი იქნება მეორე ტიპის მომდევნო საინტერესო რიცხვი, ესაა $17\cdot 2^{29}$. ამისათვის უნდა დავადგინოთ, რომელ ორ პირველი ტიპის საინტერესო რიცხვს შორის მოხვდება იგი და, ასევე, უნდა დავრწმუნდეთ, რომ 20-სა და $17\cdot 2^{29}$-ს შორის სხვა ძალიან საინტერესო რიცხვი არ შეგვხვდება. ჩამოვწეროთ პირველი რამდენიმე საინტერესო რიცხვი:

$$2\cdot 3;\ 2^2\cdot 5;\ 3\cdot 5^2;\ 4\cdot 7^3;\ 5\cdot 9^4;\ 6\cdot 11^5;\ 7\cdot 13^6;\ 8\cdot 15^7;$$

ჯერჯერობით ვხედავთ, რომ 20-ის გარდა სხვა ძალიან საინტერესო რიცხვი არ შეგვხვდა. ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი საინტერესო რიცხვი იქნება მეორე ტიპის, ანუ $17\cdot 2^{29}$. შევნიშნოთ, რომ

$$17\cdot 2^{29} = 34\cdot 2^{28} = 34\cdot 16^7 > 8\cdot 15^7$$

$$17\cdot 2^{29} = 17\cdot 16^7\cdot 2 < 17\cdot 17^7\cdot 2 = 2\cdot 17^8 < 9\cdot 17^8$$

მივიღეთ, რომ მეორე ტიპის საინტერესო რიცხვი $17\cdot 2^{29}$ მოთავსდა პირველი ტიპის საინტერესო რიცხვებს $8\cdot 15^7$-სა და $9\cdot 17^8$-ს შორის. $8\cdot 15^7 < 17\cdot 2^{29} < 9\cdot 17^8$. ცხადია, რომ ეს მეორე ტიპის საინტერესო რიცხვი მის არცერთ მეზობელთან არ არის თანამარტივი. ესე იგი ის არის სიდიდით მეორე ძალიან საინტერესო რიცხვი.

**ამოცანა 10:** *სამი რადიუსი* $(\sqrt{11}$ ქულა$)$

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

$ABC$ სამკუთხედის $AB, BC$ და $AC$ გვერდებზე აღებულია, შესაბამისად, $P$, $Q$ და $R$ წერტილები. ცნობილია, რომ $PQR$ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები უდრის 7, 8 და 9 სანტიმეტრებს. იპოვეთ $APR$, $BPQ$ და $CQR$ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსები თუ ცნობილია, რომ სამივე ეს წრეწირი ეხება $PQR$ სამკუთხედში ჩახაზულ წრეწირს.

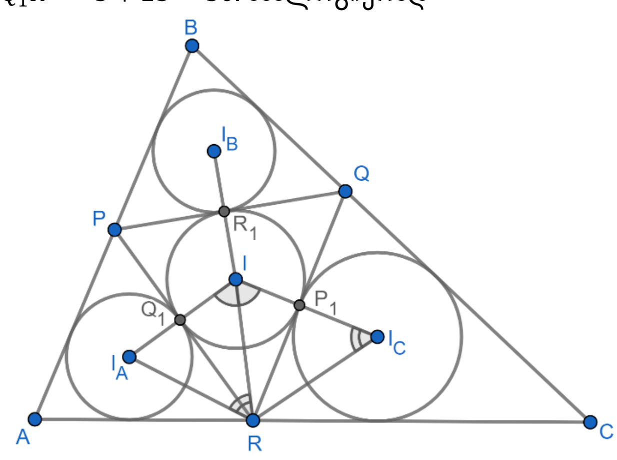
*ამოხსნა*

*პასუხი:* $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

ჩავთვალოთ, რომ $PQ = 7$; $QR = 8$ და $PR = 9$. ვთქვათ $PQR$ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი არის $I$, ხოლო $PQ, QR$ და $PR$ გვერდებთან შეხების წერტილები არის, შესაბამისად, $R_1$, $P_1$ და $Q_1$. ცხადია, რომ $PQ_1 = PR_1 = \frac{7+9-8}{2} = 4$; $QR_1 = QP_1 = \frac{7+8-9}{2} = 3$ და $RQ_1 = RP_1 = \frac{8+9-7}{2} = 5$.

გამოვთვალოთ $PQR$ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის $r$ რადიუსი. ჰერონის ფორმულით $PQR$ სამკუთხედის ფართობი არის: $\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (3+4+5)} = 12\sqrt{5}$. მეორე მხრივ, იგივე სამკუთხედის ფართობი არის: $\frac{1}{2}r \cdot 7 + \frac{1}{2}r \cdot 8 + \frac{1}{2}r \cdot 9 = 12r$. ესე იგი $12r = 12\sqrt{5}$. ანუ $r = \sqrt{5}$.

პითაგორას თეორემის გამოყენებით დავითვლით $IR^2 = IQ_1^2 + Q_1R^2 = 5 + 25 = 30$. ანალოგიურად $IP^2 = 5 + 16 = 21$ და $IQ^2 = 5 + 9 = 14$.




ვთქვათ, $APR$, $BPQ$ და $CQR$ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებია, შესაბამისად, $I_A, I_B$ და $I_C$, ხოლო რადიუსები $r_A, r_B$ და $r_C$. ცხადია, რომ $\angle ARP + \angle PRQ + \angle QRC = 180°$, აქედან გამომდინარე $\angle I_ARQ_1 + \angle Q_1RI + \angle P_1RI_C = 90°$, ასევე, რადგან $\angle P_1I_CR + \angle P_1RI_C = 90°$, ესე იგი $\angle P_1I_CR = \angle I_ARQ_1 + \angle Q_1RI = \angle I_ARI$. ცხადია, რომ $\angle Q_1IR = \angle P_1IR$. მივიღეთ, რომ სამკუთხედები $I_ARI$ და $RI_CI$ არიან მსგავსები. მივიღეთ, რომ

$$\frac{II_A}{IR} = \frac{IR}{II_C}$$

ანუ, $IR^2 = II_A \cdot II_C$. ანალოგირად ვაჩვენებთ, რომ $IP^2 = II_A \cdot II_B$ და $IQ^2 = II_B \cdot II_C$. საბოლოოდ მივიღეთ შემდეგი ტოლობები:

$$(r_A + \sqrt{5})(r_C + \sqrt{5}) = 30$$

$$(r_B + \sqrt{5})(r_A + \sqrt{5}) = 21$$

$$(r_C + \sqrt{5})(r_B + \sqrt{5}) = 14$$

სამივე ტოლობის გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\left(r_A+\sqrt{5}\right)\left(r_B+\sqrt{5}\right)\left(r_C+\sqrt{5}\right)=\sqrt{30\cdot 14\cdot 21}=42\sqrt{5}$$

მივიღეთ, რომ $r_A+\sqrt{5}=\frac{42\sqrt{5}}{14}=3\sqrt{5}$, ასევე $r_B+\sqrt{5}=\frac{42\sqrt{5}}{30}=\frac{7}{5}\sqrt{5}$ და $r_C+\sqrt{5}=\frac{42\sqrt{5}}{21}=2\sqrt{5}$. საბოლოო პასუხი კი იქნება შემდეგი: $r_A=2\sqrt{5}$, ასევე $r_B=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ და $r_C=\sqrt{5}$.