ოილერის ოლიმპიადა - 2023. მეორე ტური. (პირველი სესია)

ამოხსნები

ამოცანა 1:

(ამოცანის ავტორი: გლუნჩაძე ნიკა)

ერთ რიგში ჩამოწერილია 100 ნატურალური რიცხვი. ცნობილია, რომ მეორედან დაწყებული ყოველი რიცხვი მიღებულია მისი მარცხენა მეზობელი რიცხვის ან 2-ზე გაყოფით, ან 16-ზე გამრავლებით. შესაძლებელია თუ არა, რომ 100-ვე რიცხვი ჯამში გვაძლევდეს 2^{2023}-ს?

ა მ ო ხ ს ნ ა

პ ა ს უ ხ ი: შეუძლებელია.

ვთქვათ, ეს 100 ნატურალური რიცხვი არის $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ და ჩამოწერილია რიგში მარცხნიდან მარჯვნივ ამავე თანმიმდევრობით. პირობის თანახმად $2a_{i+1} = a_i$ ან $a_{i+1} = 16a_i$ ყოველი i-სთვის 1-იდან 99-ის ჩათვლით. შევნიშნოთ, რომ ორივე შემთხვევაში $2a_{i+1} \equiv a_i (mod\ 31)$. ამიტომ

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \equiv a_{100}(2^{99} + 2^{98} + \cdots + 2^2 + 2 + 1) \equiv a^{100}(2^{100} - 1) \equiv a^{100}(32^{20} - 1) \equiv 0\ (mod\ 31)$$

მივიღეთ რომ ამ 100 რიცხვის ჯამი იყოფა 31-ზე. ესე იგი ამ 100 რიცხვის ჯამი ვერ გაუტოლდება 2^{2023}-ს, რადგან 2^{2023} არ იყოფა 31-ზე.

ამოცანა 2:

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

ვთქვათ, N რაიმე დადებითი მთელი რიცხვია. ქართული ხალხური ცეკვების შემსრულებელთა გუნდი შედგება $2N$ რაოდენობის მოცეკვავისგან, რომელთა შორის N რაოდენობის ქალი და N რაოდენობის კაცია. ყველა ქალი, ისევე როგორც ყველა კაცი, გადანომრილია მთელი რიცხვებით 1-დან N-ის ჩათვლით. ერთერთი ცეკვის შესრულებისას რაღაც მომენტში ყველა მოცეკვავე ერთ რიგში დგება. მათ სურთ, რომ როდესაც ისინი ერთ რიგში განლაგდებიან, ყოველი k-სთვის 1-დან N-ის ჩათვლით, k ნომერ ქალსა და k ნომერ კაცს შორის იდგეს ზუსტად k რაოდენობის მოცეკვავე. დაამტკიცეთ, რომ თუ

ა) $N \equiv 1$ ან $2\ (mod\ 4)$ მაშინ მოცეკვავეები ვერ შეძლებენ განლაგდნენ სასურველი თანმიმდევრობით.

ბ) $N \equiv 0$ ან $3\ (mod\ 4)$ მაშინ მოცეკვავეებს შეუძლიათ სასურველი თანმიმდევრობით განლაგება.

ა მ ო ხ ს ნ ა

ჯერ დავამტკიცოთ ა) ნაწილი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ ვთქვათ $N \equiv 1$ ან $2\ (mod\ 4)$ და მოცეკვავეებმა შეძლეს სასურველი თანმიმდევრობით განლაგება. მოცეკვავეების პოზიციები მარცხნიდან მარჯვნივ გადავნომროთ 1-დან $2N$-ის ჩათვლით მთელი რიცხვებით. ცხადია, რომ თუ k ლუწია, მაშინ k ნომერი ქალის და k ნომერი კაცის პოზიციებიდან ერთი კენტია და მეორე ლუწი, ხოლო თუ k კენტია, მაშინ k ნომერი ქალის და k ნომერი კაცის პოზიციებიდან ან ორივე კენტია, ან ორივე ლუწია. გამოვიდა, რომ კენტნომრიანი მოცეკვავეები იკავებენ ლუწი რაოდენობის კენტ პოზიციას, ხოლო ლუწნომრიანი მოცეკვავეები იკავებენ ზუსტად იმდენ კენტ პოზიციას, რამდენი ლუწი რიცხვიცაა 1-დან N-ის ჩათვლით. მივიღეთ, რომ 1-დან N-ის ჩათვლით ლუწ რიცხვთა რაოდენობის ლუწკენტობა ემთხვევა, 1-დან $2N$-ის ჩათვლით კენტ რიცხვთა რაოდენობის ლუწკენტობას.

თუ $N = 4k + 1$, მაშინ 1-დან N-ის ჩათვლით ლუწ რიცხვთა რაოდენობა არის $2k$ და 1-დან $2N$-ის ჩათვლით კენტ რიცხვთა რაოდენობა არის $4k + 1$. ხოლო, როდესაც $N = 4k + 2$, მაშინ 1-დან N-ის ჩათვლით ლუწ რიცხვთა რაოდენობა არის $2k + 1$ და 1-დან $2N$-ის ჩათვლით კენტ რიცხვთა რაოდენობა არის $4k + 2$. როგორც ვხედავთ საჭირო ლუწკენტობები ორივე შემთხვევაში განსხვავებულია. ესე იგი თუ $N \equiv 1$ ან $2\ (mod\ 4)$ მაშინ მოცეკვავეები ვერ შეძლებენ განლაგდნენ სასურველი თანმიმდევრობით.

ახლა დავამტკიცოთ ბ) ნაწილი. თუ $N \equiv 0$ ან $3\ (mod\ 4)$, მაშინ მოვიყვანოთ მოცეკვავეების სასურველი თანმიმდევრობით განლაგების მაგალითი. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა, $N = 4k$.

პოზიციებზე $1, 2, \dots, k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $4k - 2,\ 4k - 4, \dots, 2k + 2, 2k$.
$(k + 1)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k - 1$.
პოზიციებზე $k + 2, k + 3, \dots, 2k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k - 3, 2k - 5, \dots, 3, 1$.
$(2k + 1)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k$.
პოზიციებზე $2k + 2, 2k + 3, \dots, 3k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $1, 3, \dots, 2k - 5, 2k - 3$.
პოზიციებზე $3k + 1, 2k + 2, \dots, 4k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k, 2k + 2, \dots, 4k - 4, 4k - 2$.
$(4k + 1)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $2k - 1$.
პოზიციებზე $4k + 2, 4k + 3, \dots, 5k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $4k - 3, 4k - 5, \dots, 2k + 3, 2k + 1$.
$(5k + 1)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k - 1$.

პოზიციებზე $5k+2, 5k+3, \dots, 6k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k-2, 2k-4, \dots, 4, 2$.
$(6k+1)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $2k-1$.
$(6k+2)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k$.
პოზიციებზე $6k+3, 6k+4, \dots, 7k+1$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2, 4, \dots, 2k-4, 2k-2$.
პოზიციებზე $7k+2, 7k+3, \dots, 8k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k+1, 2k+3, \dots, 4k-5, 4k-3$.

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, როცა $N=4k+3$ და მოვიყვანოთ სასურველი განლაგების მაგალითი:

პოზიციებზე $1, 2, \dots, k$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $4k,\ 4k-2, \dots, 2k+4, 2k+2$.
$(k+1)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k+2$.
პოზიციებზე $k+2, k+3, \dots, 2k+1$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k-1, 2k-3, \dots, 3, 1$.
$(2k+2)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k+3$.
პოზიციებზე $2k+3, 2k+4, \dots, 3k+2$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $1, 3, \dots, 2k-3, 2k-1$.
პოზიციებზე $3k+3, 2k+4, \dots, 4k+2$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k+2, 2k+4, \dots, 4k$.
$(4k+3)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $2k+1$.
პოზიციებზე $4k+4, 4k+5, \dots, 5k+3$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $4k+1, 4k-1, \dots, 2k+3$.
$(5k+4)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k+2$.
პოზიციებზე $5k+5, 5k+6, \dots, 6k+4$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2k, 2k-2, \dots, 4, 2$.
$(6k+5)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $2k+1$.
$(6k+6)$-ე პოზიციაზე დგას მოცეკვავე ნომრით $4k+3$.
პოზიციებზე $6k+7, 6k+8, \dots, 7k+6$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $2, 4, \dots, 2k-2, 2k$.
პოზიციებზე $7k+7, 7k+8, \dots, 8k+6$ დგანან მოცეკვავეები ნომრებით: $3k+1, 3k+3, \dots, 4k+1$.

ორივე შემთხვევაში გვაქვს სასურველი განლაგების მაგალითი, მაშასადამე თუ $N \equiv 0$ ან $3 \ (mod\ 4)$ მაშინ მოცეკვავეებს შეუძლიათ სასურველი თანმიმდევრობით განლაგება.

კ ო მ ე ნ ტ ა რ ი: ბ) ნაწილის კონსტრუქცია მოიფიქრა საქართველოს მატემატიკის ეროვნული ნაკრების მწვრთნელმა ბატონმა გიორგი ჭელიძემ. მადლობა მას 😊

მ ე ო რ ე ა მ ო ხ ს ნ ა (ა) ნაწილისთვის)

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $N \equiv 1$ ან $2 \ (mod\ 4)$ და მოცეკვავეები განლაგდნენ სასურველი თანმიმდევრობით. მოცეკვავეთა პოზიციები მარცხნიდან მარჯვნივ გადავნომროთ 1-დან $2N$-ის ჩათვლით მთელი რიცხვებით. ყოველი k-სთვის 1-დან N-ის ჩათვლით, უფრო მარცხნივ მდგომი k ნომერი მოცეკვავის პოზიციის ნომერი აღვნიშნოთ x_k-თი. ცხადია, მარჯვენა k ნომერი მოცეკვავის პოზიციის ნომერი იქნება x_k+k+1. ყველა მოცეკვავის პოზიციის ნომრების ჯამი გამოვა შემდეგი:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N + (x_1 + 2) + (x_2 + 3) + \cdots + (x_N + N + 1) = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) + \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1$$

მეორე მხრივ, ყველა მოცეკვავის პოზიციის ნომრების ჯამი არის $\frac{2N(2N+1)}{2}$. მივიღეთ, რომ

$$2(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) + \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1 = \frac{2N(2N+1)}{2}$$

საიდანაც ვიღებთ შემდეგს

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = \frac{2N(2N+1)}{4} - \frac{(N+1)(N+2)}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4N^2 + 2N - N^2 - 3N - 2 + 2}{4} = \frac{3N^2 - N}{4}$$

მაგრამ როცა $N \equiv 1$ ან $2 \ (mod\ 4)$ მაშინ $3N^2 - N \equiv 2 \ (mod\ 4)$, ანუ $x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ არ გამოდის მთელი, რაც შეუძლებელია. ესე იგი, თუ $N \equiv 1$ ან $2 \ (mod\ 4)$ მაშინ მოცეკვავეები ვერ შეძლებენ განლაგდნენ სასურველი თანმიმდევრობით.

ამოცანა 3:

(ამოცანის ავტორი: მელიქიძე ზაზა)

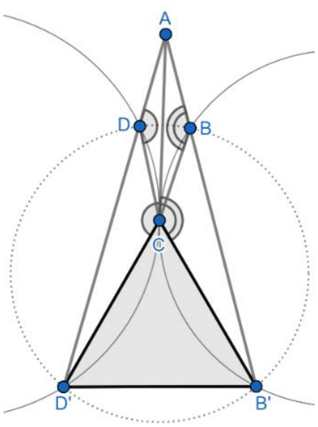
$ABCD$ ამოზნექილ ოთხკუთხედში სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

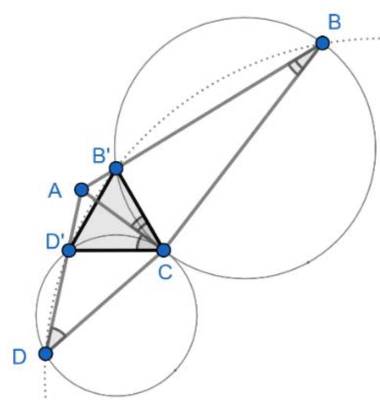
იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის ყველა მახვილი კუთხის ჯამი.

პირველი ამოხსნა

პასუხი: $60°$.



განვიხილოთ ინვერსია A ცენტრით და AC რადიუსით. ვთქვათ, D წერტილი გადავიდა D' წერტილში, ხოლო B წერტილი - B'-ში. ცხადია, სამართლიანი იქნება შემდეგი: $DD'C$ და $BB'C$ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები ეხებიან AC წრფეს C წერტილში და, ასევე, D, D', B და B' წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.



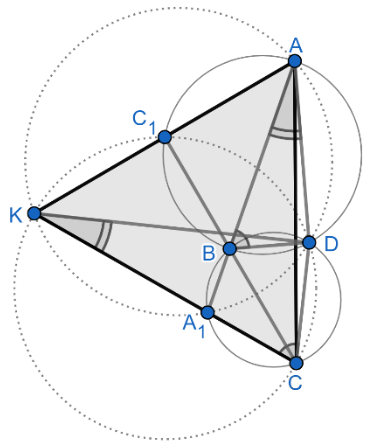
$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{AB'}{AD} = \frac{AC^2/_{AB}}{AD} = \frac{AC^2}{AB \cdot AD}$$

მივიღეთ, რომ $B'D' = \frac{AC^2 \cdot BD}{AB \cdot AD}$. ანალოგირად დავადგენთ, რომ

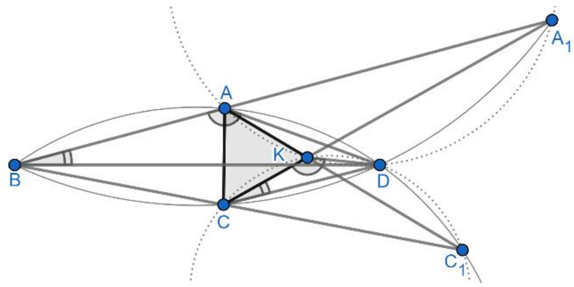
$$CD' = \frac{AC^2 \cdot CD}{AC \cdot AD} = \frac{AC \cdot CD}{AD} \text{ და } CB' = \frac{AC^2 \cdot CB}{AC \cdot AB} = \frac{AC \cdot CB}{AD}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $AB \cdot CD = AD \cdot BC = AC \cdot BD$, ვღებულობთ, $B'D' = CD' = CB'$. ანუ სამკუთხედი $CB'D'$ ტოლგვერდაა. აქედან გამომდინარე $\angle ACB' + \angle ACD' = 60°$ ან $\angle ACB' + \angle ACD' = 300°$. ეს დამოკიდებული იქნება იმაზე, მოხვდებიან თუ არა A და C წერტილები $B'D'$ წრფის მიმართ ერთსა და იმავე ნახევარსიბრტყეში. ასევე, ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში $\angle ACB' = \angle ACB$ და $\angle ACD' = \angle ACD$. ესე იგი $ABCD$ ოთხკუთხედის B და D კუთხეების ჯამი არის ან $60°$ ან $300°$. ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში $ABCD$ ოთხკუთხედში მახვილ კუთხეთა რაოდენობა იქნება ზუსტად ორი და მათი ჯამი იქნება $60°$.

მეორე ამოხსნა



ვთქვათ, CB წრფე ABD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს კვეთს B და C_1 წერტილებში, ხოლო AB წრფე CBD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს კვეთს B და A_1 წერტილებში. AC_1 და CA_1წრფეების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ K-თი. ცხადია, რომ D წერტილი იქნება KC_1BA_1 ოთხკუთხედის შესაბამისი მიქელის წერტილი. ანუ წერტილები K, C_1, D, C, ასევე, წერტილები K, A_1, D, A იქნებიან ერთ წრეწირზე. აქედან გამომდინარე $\angle KCD = \angle ABD$ და $\angle DKC = \angle DAB$. მივიღეთ, რომ KCD და ABD სამკუთხედები მსგავსია. ანუ გვექნება:



$$\frac{KC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

მიღებულის და მოცემულობის თანახმად გვექნება:

$$KC = \frac{AB \cdot CD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BD} = AC$$

სრულიად ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $KA = AC$. მივიღეთ, რომ AKC სამკუთხედი არის ტოლგვერდა.

მიღებული გვაქვს, რომ $\angle BAD + \angle BCD = \angle CKD + \angle AKD$. ასევე, ცხადია, $\angle CKD + \angle AKD = 60°$ ან $\angle CKD + \angle AKD = 300°$, იმის და მიხედვით KD სხივი გაივლის თუ არა KA და KC სხივებს შორის. ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში $ABCD$ ოთხკუთხედში მახვილ კუთხეთა რაოდენობა იქნება ზუსტად ორი და მათი ჯამი იქნება $60°$.