

ოილეერის ოლიმპიადა - 2023. პირველი ტური. (მეორე სესია)

ამოცანა 6: რეზუსი ($\sqrt{2}$ ქულა)

მოცემულია რეზუსი:

$$AB + BC + CA = XY + YZ + ZX = KL + LM + MK$$

სადაც განსხვავებული ასოები განსხვავებულ ციფრებს, ხოლო ერთნაირი ასოები ერთნაირ ციფრებს აღნიშნავენ. რას უდრის $AXK + BYL + CZM$?

ამოცანა 7: წუნა და წრუნუნა კვადრატულ ცხრილში (2 ქულა)

7×7 ზომის კვადრატული ცხრილის მარცხენა ქვედა უჯრაში ზის წრუნუნა, მარჯვენა ზედა უჯრაში ზის წუნა, ხოლო ცხრილის ცენტრალურ უჯრაში დევს ყველის ნაჭერი. წრუნუნას სურს მივიდეს წუნასთან და ყველის ნაჭერიც მიუტანოს. ცნობილია, რომ წრუნუნა ყოველი უჯრიდან გადაადგილდება მხოლოდ მარჯვენა ან ზედა მეზობელ უჯრაში. დაადგინეთ, რამდენი განსხვავებული გზით შეუძლია წრუნუნას მარცხენა ქვედა უჯრიდან მარჯვენა ზედა უჯრაში მისვლა ისე, რომ ცენტრალურ უჯრაზეც გაიაროს.

							წუნა
					ყველი		
წრუნუნა							

ამოცანა 8: (n, m) წყვილთა რაოდენობა (\sqrt{n} ქულა)

ვთქვათ, a, b, c და d ისეთი დადებითი მთელი რიცხვებია, რომ სრულდება შემდეგი ორი უტოლობა: $a < 10^{20} \cdot c$ და $b > 10^{23} \cdot d$. დაადგინეთ, მინიმუმ რამდენი შეიძლება იყოს ყველა ისეთ დადებით მთელ რიცხვთა (n, m) წყვილის რაოდენობა, რომელთათვისაც $n \cdot m = 2^{2023}$ და

$$\frac{ab}{n} + \frac{cd}{m} < \frac{(a+c)(b+d)}{n+m}$$

ამოცანა 9: ძალიან საინტერესო რიცხვი ($\sqrt{8}$ ქულა)

დადებით მთელ x რიცხვს დავარქვათ საინტერესო, თუ არსებობს დადებითი მთელი y რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $(x+y)^y = (x-y)^x$. ვთქვათ, ზრდადობით ჩამოწერეს ყველა საინტერესო რიცხვი. საინტერესო რიცხვს დავარქვათ ძალიან საინტერესო, თუ იგი მისი ორივე საინტერესო მეზობლიდან არცერთთან არ არის ურთიერთმარტივი. იპოვეთ სიდიდით მეორე ძალიან საინტერესო რიცხვი. (ივულისხმება, რომ სიდიდით პირველი საინტერესო რიცხვი არ არის ძალიან საინტერესო)

ამოცანა 10: სამი რადიუსი ($\sqrt{11}$ ქულა)

ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდებზე აღებულია, შესაბამისად, P, Q და R წერტილები. ცნობილია, რომ PQR სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები უდრის 7, 8 და 9 სანტიმეტრებს. იპოვეთ APR, BPQ და CQR სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსები თუ ცნობილია, რომ სამივე ეს წრეწირი ეხება PQR სამკუთხედში ჩახაზულ წრეწირს.