ამოცანა 4:

(ამოცანის ავტორი: არაბიძე გიორგი)

დაფაზე წერია სამი რიცხვი: 2023, 2024 და 2025. ერთ სვლაზე უფლება გვაქვს რომელიმე ორი მათგანი გავზარდოთ 1-ით, ხოლო მესამე შევამციროთ 2-ით.

ა) შესაძლებელია თუ არა, რომ ასეთი ოპერაციის რამდენიმეჯერ ჩატარების შემდეგ მივიღოთ რიცხვთა სამეული, რომელშიც ორი რიცხვი თანაბარია?

ბ) იპოვეთ დადებით მთელ რიცხვთა ყველა იმ დალაგებულ სამეულთა რაოდენობა, რომელთა მიღებაც შესაძლებელია ასეთი ოპერაციის რამდენიმეჯერ ჩატარებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: ა) შეუძლებელია. ბ) $\binom{2024}{2} \cdot 3 = C_{2024}^2 \cdot 3$.

საწყის მომენტში $(2023, 2024, 2025)$ რიცხვთა სამეულის 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთებია $(1, 2, 0)$. რადგან $x + 1 \equiv x - 2 \ (mod\ 3)$ ამიტომ ნებისმიერ შემთხვევაში შემდგომი სამეულის 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები იქნება $(2, 0, 1)$, ხოლო ამის შემდეგ იქნება - $(0, 1, 2)$. ცხადია შემდეგ დაიწყება ნაშთა სამეულის გამეორება. ესე იგი ნებისმიერ მომენტში დაფაზე დაწერილ რიცხვთა სამეულის 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები არის ან $(1, 2, 0)$ ან $(2, 0, 1)$ ან $(0, 1, 2)$.

ა) ნაწილის პასუხი გამოდის, რომ შეუძლებელია რიცხვთა ისეთი სამეულის მიღება, რომელშიც ორი რიცხვი თანაბარია, რადგან არცერთ შემთხვევაში არ მიიღება ნაშთთა სამეული, რომელშიც რომელიმე ორი ნაშთი ერთმანეთს ემთხვევა.

ბ) ნაწილის პასუხის საპოვნელად დავამტკიცოთ, რომ დაფაზე შესაძლებელია მივიღოთ მთელ რიცხვთა ნებისმიერი ისეთი (n, m, l) სამეული, რომლისთვისაც $n + m + l = 6072$ და, ასევე, ან $(n, m, l) \equiv (1, 2, 0)\ (mod\ 3)$ ან $(n, m, l) \equiv (2, 0, 1)\ (mod\ 3)$ ან $(n, m, l) \equiv (0, 1, 2)\ (mod\ 3)$. რიცხვთა ყველა ასეთ სამეულს დავარქვათ *მისაღები.* ცხადია სამივე რიცხვის ჯამი უცვლელია, ამიტომ სხვა სამეულის მიღება შეუძლებელია.

სულ გვაქვს შემდეგი სამი ტიპის ოპერაცია: პირველი - $(a, b, c) \to (a + 1, b + 1, c - 2)$, მეორე - $(a, b, c) \to (a + 1, b - 2, c + 1)$ და მესამე - $(a, b, c) \to (a - 2, b + 1, c + 1)$. განვიხილოთ რიცხვთა

ნებისმიერი *მისაღები* (n, m, l) სამეული და ვაჩვენოთ, რომ მათი მიღება შესაძლებელია. თუ ჩვენ პირველი ტიპის ოპერაციას ჩავატარებთ x-ჯერ, მეორეს - y-ჯერ და მესამეს - z-ჯერ, მაშინ უნდა შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{cases} 2023 + x + y - 2z = n \\ 2024 + x - 2y + z = m \end{cases}$$

ავტომატურად შესრულდება ტოლობა $2025 - 2x + y + z = l$, რადგან $n + m + l = 6072$. თუ მეორე ტოლობას გამოვაკლებთ პირველს, მივიღებთ $3(z - y) = m - n - 1$. ესე იგი ასეთი მთელი x, y, z სამეული არსებობს თუ $m - n - 1$ იყოფა 3-ზე. ეს კი სრულდება ყოველი *მისაღები* სამეულისთვის.

ახლა დავთვალოთ *მისაღებ* სამეულთა რაოდენობა, რომელშიც სამივე რიცხვი დადებითია. თუ $n + m + l = 6072$ და $(n, m, l) \equiv (1, 2, 0)\ (mod\ 3)$, მაშინ $n = 3k_1 - 2$, $m = 3k_2 - 1$, $l = 3k_3$ და $3k_1 - 2 + 3k_2 - 1 + 3k_3 = 6072$, საიდანაც $k_1 + k_2 + k_3 = 2025$. მივიღეთ, რომ დადებით მთელ რიცხვთა ისეთ სამეულთა რაოდენობა, რომლისთვისაც $n + m + l = 6072$ და, ასევე $(n, m, l) \equiv (1, 2, 0)\ (mod\ 3)$ არის იმდენი, რამდენი დადებით მთელ რიცხვთა (k_1, k_2, k_3) სამეულიც არსებობს, რომლისთვისაც $k_1 + k_2 + k_3 = 2025$. ასეთ სამეულთა რაოდენობა კი არის $\binom{2024}{2}$ რადგან თუ წარმოვიდგენთ ერთ რიგში მდგარ 2025-ცალ ერთიანს, მათ შორის იქნება 2024-ცალი დაშორება და მათგან რომელიმე ორში თუ ჩავსვამთ პლიუსს, ჩვენ ურთიერთცალსახად დაგვიფიქსირდება სამი დადებითი მთელი რიცხვი, რომელთა ჯამი არის 2025-ის ტოლი.

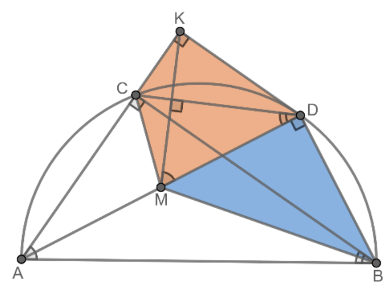
ცხადია, იგივე რაოდენობის იქნება იმ დადებით მთელ რიცხვთა სამეულთა რაოდენობა, რომლისთვისაც $n + m + l = 6072$ და $(n, m, l) \equiv (2, 0, 1)\ (mod\ 3)$ და ისეთებიც, რომლისთვისაც $n + m + l = 6072$ და $(n, m, l) \equiv (0, 1, 2)\ (mod\ 3)$. ესე იგი საბოლოო პასუხი გამოვიდა $\binom{2024}{2} \cdot 3$.

ამოცანა 5:

(ამოცანის ავტორი: ირაკლი შალიბაშვილი)

მოცემულია AB რკალი და მასზე მდებარე ნებისმიერი C წერტილი. ვთქვათ, D არის BC რკალის შუა წერტილი, ხოლო M არის AD ქორდის შუა წერტილი. მოცემული რკალის მიმართ D წერტილზე გავლებული მხები AC სხივს კვეთს K წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ MBD სამკუთხედისა და $MCKD$ ოთხკუთხედის ფართობები თანაბარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overset{\frown}{AB} = 180^{\circ}$.

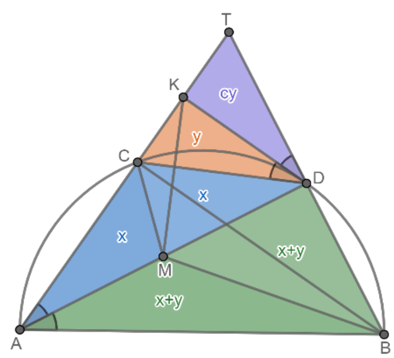
ამოხსნა:



ვთქვათ $\overset{\frown}{AB} = 180^{\circ}$. ცხადია $CD = BD$ და $DK \parallel CB$. ესე იგი $\angle AKD = 90^{\circ}$ და $KM = MA = MD$. ანუ $\angle KMD = 2 \cdot \angle KAD = \angle CAD$. შესაბამისად $\angle KMD + \angle CDM = \angle CAB + \angle CBA = 90^{\circ}$. ამიტომ $KM \perp CD$. ახლა ვაჩვენოთ ფართობების ტოლობა:

$$S_{MCKD} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot BD = S_{MBD}$$

დამტკიცდა, რომ თუ $\overset{\frown}{AB} = 180^{\circ}$ მაშინ $S_{MCKD} = S_{MBD}$.



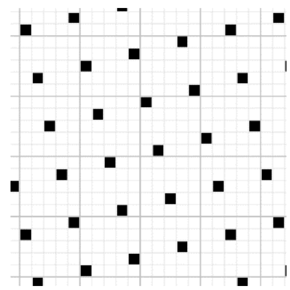
ახლა ვაჩვენოთ პირიქით. ვთქვათ $S_{MCKD} = S_{MBD}$. ცხადია $\angle TDK = \angle CDK = \angle TAD = \angle DAB$. შესაბამისად TDC და TAB სამკუთხედები მსგავსია. ამიტომ $\frac{TK}{KC} = \frac{TD}{DB} \equiv c$. თუ $S_{MCD} = x$ და $S_{KCD} = y$, მაშინ $S_{ADT} = S_{ACM} + S_{MCD} + S_{KCD} + S_{KDT} = 2x + y + cy$ და $S_{ABD} = 2 \cdot S_{MBD} = 2 \cdot S_{MCKD} = 2x + 2y$. აქედან გამომდინარე

$$c = \frac{TD}{DB} = \frac{S_{ADT}}{S_{ABD}} = \frac{2x + y + cy}{2x + 2y}$$

მივიღეთ, რომ $(2x + 2y)c = 2x + y + cy$, საიდანაც $(c - 1)(2x + y) = 0$. ანუ $c = 1$. ესე იგი ABT სამკუთხედში AD ბისექტრისაცაა და მედიანაც. შესაბამისად $\angle ADB = 90^{\circ}$ და $\overset{\frown}{AB} = 180^{\circ}$.

ამოცანა 6:

(ამოცანის ავტორი: ალექსანდრე საათაშვილი)



ვთქვათ, სიბრტყე დაყოფილია ერთეულოვან კვადრატებად ჰორიზონტალური და ვერტიკალური წრფეებით. მიღებული უსასრულო მართკუთხა ცხრილის ზოგიერთ უჯრათა შეღებვას ვუწოდოთ *ბადური,* თუ შეღებილი კვადრატების ცენტრების სიმრავლე ემთხვევა, რაიმე თანაბრად დაშორებულ პარალელურ წრფეთა უსასრულო ოჯახისა და მათი მართობული და, ასევე, იგივე მანძილით თანაბრად დაშორებულ წრფეთა უსასრულო ოჯახის გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლეს. მაგალითად, ნახაზზე ნაჩვენები შეღებვა არის ბადური. ბადური შეღებვის *ზომა* ვუწოდოთ მანძილს შეღებილი კვადრატის ცენტრიდან უახლოესი შეღებილი კვადრატის ცენტრამდე. იპოვეთ ყველა ნატურალური N რიცხვი, რომლისთვისაც შესაძლებელია ყველა ამ ერთეულოვანი კვადრატის შეღებვა N რაოდენობის ფერის გამოყენებით ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი სამი პირობა:

1. ყოველი ფერისთვის არსებობს ერთი მაინც ამ ფერის უჯრა.
2. ყოველი ფერის მიმართ შეღებვა არის ბადური.
3. N-ივე ფერის ბადური შეღებვების ზომები თანაბარია.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

პ ა ს უ ხ ი: ყველა დადებითი რიცხვი, რომელიც წარმოდგება ორი არაუარყოფითი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამის სახით. (თ ე ო რ ე მ ა: დადებითი მთელი რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოდგება ორი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამის სახით, როცა მის მარტივ მამრავლებად დაშლაში თუ გვხვდება $4k+3$ ტიპის მარტივი გამყოფი, მაშინ ეს მარტივი რიცხვი დაშლაში გვხვდება ლუწჯერ: https://en.wikipedia.org/wiki/Sum_of_two_squares_theorem)

განვიხილოთ ერთი ფერის საშუალებით ზოგიერთი უჯრის ნებისმიერი ბადური შეღებვა, რომელიც არის d ზომის. S-ით აღვნიშნოთ განხილული ბადური შეღებვისას შეღებილი უჯრედების სიმრავლე.

<u>ლ ე მ ა:</u> ვთქვათ n ნებისმიერი დადებითი მთელი რიცხვია. თუ R_n არის ნებისმიერი $n\times n$ ზომის კვადრატი, რომლის გვერდების შესაბამისი წრფეები ემთხვევიან რომელიღაც გავლებულ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ წრფეებს, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ორმაგი უტოლობა

$$\frac{n^2}{d^2}-8n+16\le |S\cap R_n|\le \frac{n^2}{d^2}+8n+16$$

სადაც $|S\cap R_n|$ აღნიშნავს R_n კვადრატში შეღებილი უჯრედების რაოდენობას.

<u>ლ ე მ ი ს   დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.</u> კვადრატს დავარქვათ S-კვადრატი, თუ მისი ოთხივე წვერო არის შეღებილი უჯრედის ცენტრი, ხოლო გვერდის სიგრძე არის d-ს ტოლი. ყოველი A კვადრატისთვის, რომელიც არის S-კვადრატი, $C(A)$-თი აღვნიშნოთ მისი იმ წვეროს შესაბამისი უჯრედი, რომელიც ყველაზე მარცხნივ მდებარეობს. თუ ასეთი ორი წვეროა, მაშინ $C(A)$ იყოს ის, რომელიც არის უფრო დაბლა. ცხადია, რომ C არის ბიექცია S-კვადრატებსა და S სიმრავლეს შორის. შემდეგ, $R_n(-2)$-ით და $R_n(2)$-ით აღვნიშნოთ ის კვადრატები, რომელთაც იგივე ცენტრი აქვთ რაც R_n-ს, რომელთა გვერდები პარალელურია R_n-ის გვერდების და რომელთა გვერდის სიგრძე არის, შესაბამისად $(n-4d)$ და $(n+4d)$.

ვთქვათ, A არის ისეთი S-კვადრატი, რომლისთვისაც $A \cap R_n(-2) \neq \emptyset$. ასეთი A კვადრატების რაოდენობა აღვნიშნოთ L-ით. ცხადია, რომ ყოველი ასეთი A კვადრატისთვის $C(A)$ უჯრედი მდებარეობს R_n კვადრატში, რადგან A კვადრატის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი $2d$-ზე მეტი ვერ იქნება. ამიტომ $|S \cap R_n| \geq L$. ასევე, ცხადია, რომ ყველა ამ L რაოდენობის S-კვადრატების გაერთიანება სრულად ფარავს $R_n(-2)$ კვადრატს. ამიტომ $(n-4d)^2 \leq Ld^2$. საიდანაც:

$$L \geq \frac{(n-4d)^2}{d^2} = \frac{n^2 - 8dn + 16d^2}{d^2} = \frac{n^2}{d^2} - \frac{8n}{d} + 16 \geq \frac{n^2}{d^2} - 8n + 16$$

ესე იგი $|S \cap R_n| \geq L \geq \frac{n^2}{d^2} - 8n + 16$.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი შეღებილი X უჯრედი, რომელიც მდებარეობს R_n კვადრატში. ცხადია, რომ S-კვადრატი $C^{-1}(X)$ სრულად მდებარეობს $R_n(2)$ კვადრატის შიგნით. ამიტომ, თუ K არის ისეთი S-კვადრატების რაოდენობა, რომელიც სრულად მდებარეობს $R_n(2)$ კვადრატის შიგნით, მაშინ $K \geq |S \cap R_n|$. ასევე, რადგან ყველა ასეთი K რაოდენობის S-კვადრატების გაერთიანება მთლიანად მდებარეობს $R_n(2)$ კვადრატში, გვექნება შემდეგი: $Kd^2 \leq (n+4d)^2$. ანუ

$$K \leq \frac{(n+4d)^2}{d^2} = \frac{n^2 + 8dn + 16d^2}{d^2} = \frac{n^2}{d^2} + \frac{8n}{d} + 16 \leq \frac{n^2}{d^2} + 8n + 16$$

ესე იგი $|S \cap R_n| \leq K \leq \frac{n^2}{d^2} + 8n + 16$. □

ახლა დავუბრუნდეთ ამოცანას. განვიხილოთ N რაოდენობის ფერის გამოყენებით ყველა უჯრის შეღებვა, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. როგორც ლემის პირობაშია, დავაფიქსიროთ R_n კვადრატი. შემდეგ ყოველი ფერისთვის გამოვიყენოთ დამტკიცებული ლემა და დავწეროთ N რაოდენობის ორმაგი უტოლობა. ყველა ამ უტოლობის შეკრებით ცხადია მივიღებთ შემდეგს:

$$\frac{n^2}{d^2} \cdot N - 8n \cdot N + 16 \cdot N \leq n^2 \leq \frac{n^2}{d^2} \cdot N + 8n \cdot N + 16 \cdot N$$

მიღებული ორმაგი უტოლობა შევკვეცოთ n^2-ზე. გვექნება

$$\frac{N}{d^2} - \frac{8N}{n} + \frac{16N}{n^2} \leq 1 \leq \frac{N}{d^2} + \frac{8N}{n} + \frac{16N}{n^2}$$

ცხადია შეგვიძლია განვიხილოთ საკმარისად დიდი n და მივიღებთ, რომ $\frac{N}{d^2} \leq 1 \leq \frac{N}{d^2}$. ანუ $N = d^2$. პითაგორას თეორემის თანახმად ცხადია არსებობს არაუარყოფით მთელ რიცხვთა (x, y) წყვილი, რომლისთვისაც $d^2 = x^2 + y^2$. ესე იგი $N = x^2 + y^2$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $N > 0$ და $N = x^2 + y^2$, სადაც x და y არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, მაშინ შესაძლებელია ყველა უჯრედის შეღებვა N ფერის საშუალებით ისე, რომ შესრულდეს ამოცანის პირობაში მოთხოვნილი ყველა პირობა.

განვიხილოთ ნებისმიერი შეუღებავი უჯრედი და შევღებოთ პირველი ფერით. შემდეგ გადავთვალოთ x უჯრედი მარჯვნივ და შემდეგ y უჯრედი ზემოთ. რომელ უჯრაშიც აღმოვჩნდებით ისიც შევღებოთ პირველი ფერით. შემდეგ მოვახდინოთ ამ ორი უჯრედის შესაბამისი ბადური შეღებვა პირველი ფერის საშუალებით. ცხადია, რომ ამ ორმა უჯრედმა ცალსახად განსაზღვრა ბადური შეღებვა. ამის შემდეგ ავირჩიოთ ნებიმსიერი შეუღებავი უჯრედი და შევღებოთ მეორე ფერის გამოყენებით. ისევ გადავთვალოთ x უჯრედი მარჯვნივ და შემდეგ y უჯრედი ზემოთ. რომელ უჯრაშიც აღმოვჩნდებით ისიც შევღებოთ მეორე ფერით. ამ შემთხვევაშიც მოვახდინოთ ამ ორი უჯრის შესაბამისი ბადური შეღებვა მეორე ფერის გამოყენებით. შემდეგ ისევ ავირჩიოთ ახალი შეუღებავი უჯრედი და ასე შემდეგ, ეს პროცესი გავაგრძელოთ მანამ სანამ სრულად არ შეიღებება მთელი სიბრტყე. ცხადია, რომ სხვადასხვა ფერის ბადურ შეღებვებს თანაკვეთა ვერ ექნება, რადგან ერთი შეღებვა მეორე შეღებვის პარალელური გადატანით მიიღება.

ვაჩვენოთ, რომ ეს პროცესი აუცილებლად დასრულდება, ანუ შეუღებავი უჯრედი აღარ დარჩება. განვიხილოთ საკმარისად დიდი R_n კვადრატი. მასში სასრული უჯრედი იქნება და მისი სრულად შეღებვა საკმარისი რაოდენობის ოპერაციის ჩატარების შემდეგ მოხერხდება. ამის შემდეგ შეუღებავი უჯრედი არსად აღარ დარჩება, რადგან ნებისმიერი უჯრედის შესაბამისი ბადური შეღებვის უჯრედები R_n კვადრატშიც იარსებებს, რომელიც უკვე შეღებილია.

დასადგენი დარჩა მხოლოდ ის რომ, როცა პროცესი დასრულდება, გამოყენებული ფერების რაოდენობა იქნება ზუსტად N-ის ტოლი, სადაც $N = x^2 + y^2$. ეს კი ჩვენ ზემოთ უკვე დავამტკიცეთ. ჩვენ ისევ გვაქვს ყველა უჯრედის რაღაც რაოდენობის ფერით შეღებვა, სადაც ყველა ფერის მიმართ შეღებვა ბადურია და თითოეული ბადური შეღებვის ზომა არის $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, ამ დროს გამეყენებული ფერების რაოდენობა d^2-ის ტოლი გამოდის, ანუ $N = d^2$. ესე იგი პროცესის დასრულების შემდეგ გამოყენებული ფერების რაოდენობა იქნება $(x^2 + y^2)$-ის ტოლი.